

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ / MATHEMATICAL AND INSTRUMENTAL METHODS IN ECONOMICS

УДК 330.101.541:330.4:51

DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.11.2017.3.43-55>

М. И. ГЕРАСЬКИН<sup>1</sup>

П. В. ПОРУБОВА<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева, г. Самара, Россия

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ЭНДОГЕННОЙ ЦИКЛИЧНОСТЬЮ

**Цель:** разработка математической модели экономического роста, учитывающей цикличность макроэкономической динамики, формирование параметров модели на основе статистики экономики России.

**Методы:** экономико-математическое моделирование, системный анализ, регрессионный факторный анализ, эконометрический анализ временных рядов.

**Результаты:** в статье определено, что в условиях неустойчивого экономического роста России прогнозирование стратегических перспектив российской экономики является одним из актуальных направлений научных исследований. При этом уточняется, что построение прогнозных моделей должно базироваться на использовании множества факторов, основанных на таких базовых концепциях, как неокейнсианская модель Харрода – Домара, модель П. Рамсея – Д. Касса – Т. Купманса, концепция С. В. Дубовского, а также неоклассической модели роста Р. Солоу. На их основе разработана многофакторная дифференциальная модель экономического роста, представляющая собой модификацию неоклассической модели роста Р. Солоу, учитывающая трудосберегающую и капиталосберегающую формы научно-технического прогресса и кейнсианскую концепцию инвестиций. Параметры модели определены на основе динамики реального ВВП, занятости, основных фондов и инвестиций в основные фонды за 1965–2016 гг. в России, на базе официальных статистических данных. Обобщенная модель показала наличие длинноволновых колебаний, не выявляемых при моделировании отдельных периодов. Выявлена цикличность макроэкономической динамики с периодом 54 года, что соответствует параметрам длинных волн Н. Д. Кондратьева. На основе построенной модели был сформирован прогноз макроэкономического роста, который показывает, что после 2020 г. прирост научно-технического прогресса будет отрицательным.

**Научная новизна:** предложена модель индикатора научно-технического прогресса в виде темпа роста отношения капиталотдачи к норме накопления; получена дифференциальная модель макроэкономического роста, эндогенно учитывающая цикличность.

**Практическая значимость:** дифференциальная модель роста может быть использована для прогнозирования макроэкономической динамики, в том числе экономических кризисов, в целях стратегического регулирования экономики и разработки государственных программ экономического развития.

**Ключевые слова:** математические и инструментальные методы экономики; экономический рост; цикличность; дифференциальная модель экономической динамики; макроэкономическая динамика России

**Как цитировать статью:** Гераськин М. И., Порубова П. В. Дифференциальная модель макроэкономического роста с эндогенной цикличностью // Актуальные проблемы экономики и права. 2017. Т. 11, № 3. С. 43–55. DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.11.2017.3.43-55>

M. I. GERASKIN<sup>1</sup>

P. V. PORUBOVA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara national research University named after academician S. P. Korolev, Samara, Russia

## DIFFERENTIAL MODEL OF MACROECONOMIC GROWTH WITH ENDOGENIC CYCLICITY

**Objective:** to elaborate a mathematical model of economic growth, taking into account the cyclical nature of macroeconomic dynamics, with the model parameters based on the Russian economy statistics.

**Methods:** economic and mathematical modeling, system analysis, regression factor analysis, econometric time series analysis. Results: the article states that, under unstable economic growth in Russia, forecasting of strategic prospects of the Russian economy is one of the topical directions of scientific studies. Furthermore, construction of predictive models should be based on multiple factors, taking into account such basic concepts as the neo-Keynesian Harrod-Domar model, Ramsey – Cass – Koopmans model, S. V. Dubovskiy's concept, as well as the neoclassical growth model by R. Solow. They served as the basis for developing a multi-factor differential economic growth model, which is a modification of the neoclassical growth model by R. Solow, taking into account the labor-saving and capital-saving forms of scientific-technical progress and the Keynesian concept of investment. The model parameters are determined based on the dynamics of actual GDP, employment, fixed assets and investments in fixed assets for 1965-2016 in Russia, on the basis of official statistics. The generalized model showed the presence of long-wave fluctuations that are not detected during the individual periods modeling. The cyclical nature of macroeconomic dynamics with a period of 54 years was found, which corresponds to the parameters of long waves by N. D. Kondratiev. Basing on the model, the macroeconomic growth forecast was generated, which shows that after 2020, the increase of scientific-technical progress will be negative.

**Scientific novelty:** a model is proposed of the scientific-technical progress indicator showing the growth rate of the capital productivity ratio to the saving rate; a differential model of macroeconomic growth is obtained, which endogenously takes cyclicity into account.

**Practical significance:** the differential growth model can be used to predict the macroeconomic dynamics, including economic crises, for the strategic regulation of the economy and elaboration of state programs of economic development.

**Keywords:** Mathematical and instrumental methods in Economics; Economic growth; Cyclicity; Differential model of economic dynamics; Macroeconomic dynamics in Russia

**For citation:** Geraskin M. I., Porubova P. V. Differential model of macroeconomic growth with endogenic cyclicity, *Actual Problems of Economics and Law*, 2017, vol. 11, No. 3, pp. 43–55 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.11.2017.3.43-55>

### Введение

Неустойчивость экономического роста России и необходимость научного предвидения стратегических перспектив развития страны актуализируют исследования в области построения экономико-математических моделей, адекватно отражающих объективные тренды макроэкономической динамики. Многие процессы в рыночной экономике, как показал мировой и отечественный опыт, имеют закономерный циклический характер. Поэтому имеется возможность прогнозирования кризисов, и на основе этих прогнозов могут формироваться программы антикризисной и антициклической политики государства.

В научной литературе проблемы моделирования экономического роста и цикличности глубоко исследованы. Тренд-циклическая динамика макроэкономических показателей ведущих стран мира, выявленная Н. Д. Кондратьевым [1] и подтвержденная в последующих исследованиях [2–5], предопределила появление обширного корпуса прогнозных моделей, основанных на эконометрическом анализе временных рядов [6–8]. Однако однофакторные временные модели и модели авторегрессии в явном виде не отражают взаимовлияния макроэкономических показателей, что снижает их аналитическую ценность и приводит к необходимости разработки многофакторных эконометрических моделей трендов и циклических колебаний, основанных на

следующих базовых концепциях. Кейнсианские модели экономического роста Р. Харрода [9], Е. Домара [10] имеют вид однофакторной производственной функции валового внутреннего продукта (ВВП) от капитала при эндогенных (индуцированных ростом ВВП) инвестициях и сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, решение которого – трендовая траектория экспоненциального роста. Неоклассическая модель экономического роста Р. Солоу [11] предложена в виде двухфакторной производственной функции ВВП от капитала и труда в предположении их взаимозаменяемости. Модель развита П. Ромером [12], Р. Лукасом [13] на основе предположения о возрастающей предельной производительности труда за счет эндогенного научно-технического прогресса (НТП).

В современных теориях роста преобладает модель Солоу [14] и различные ее вариации [15–20]. Традиционной является модель с трудосберегающим НТП, приводящая к дифференциальному уравнению первого порядка относительно капиталовооруженности труда, решением которого также является экспоненциальный тренд. Циклические макроэкономические процессы описаны в кейнсианской модели мультипликатора-акселератора П. Самуэльсоном [21] и Р. Гудвином [22] на основе экзогенных однопериодных временных лагов ВВП и инвестиций. Модель сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, решением которого при некоторых соотношениях параметров является гармоническая функция динамики ВВП. Модификация модели Солоу путем введения П. Ромером [23] эндогенного НТП, задаваемого темпом улучшения технологии как мультипликатором производственной функции, сводится к дифференциальному уравнению первого порядка с переменными коэффициентами относительно капиталовооруженности, которое определяет экспоненциальный тренд и гармонические колебания ВВП.

Поскольку существенная взаимосвязь процессов экономического роста и цикличности несомненна, актуальной остается проблема создания моделей роста с эндогенной цикличностью, исследованная С. В. Дубовским [24] в следующей постановке. Модель Р. Солоу с эндогенным трудосберегающим НТП дополнена гипотезой пропорциональности инвестиций и ВВП (эндогенные инвестиции Харрода – Домара), а также гипотезами пропорциональности темпов прироста капитала, занятости, выбытия капитала и НТП коэф-

фициенту обновления капитала (отношению инвестиций к капиталу). Модель С. В. Дубовского сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно капиталотдачи и темпа прироста НТП, общее и частное решения которой определяют тренд и цикличность ВВП. Модифицированная таким образом модель Р. Солоу конструктивна, поскольку приводит к цикличности НТП эндогенно, однако не лишена некоторых несовершенств. В частности, вызывает сомнение обоснованность гипотезы пропорциональности темпа роста НТП и оборачиваемости капитала, а также не формализована связь темпа НТП с параметрами динамики моделируемой экономической системы, вследствие чего невозможно верифицировать этот показатель на эмпирических данных. В связи с этим в исследовании ставилась задача разработки модификации модели Р. Солоу, эндогенно учитывающей цикличность НТП при функциональной связи с показателями макроэкономической динамики.

#### Результаты исследования

##### *Математическая модель макроэкономической динамики*

Рассмотрим производственную функцию Р. Солоу с постоянной отдачей от масштаба (линейно-однородную) при эндогенном трудосберегающем НТП  $Y = AK^\alpha(LU)^{1-\alpha}$ , записанную в темповой (дифференциальной) форме:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha) \left( \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{U}}{U} \right), \quad (1)$$

где  $Y$  – ВВП экономики,  $K$  – валовой производственный капитал (основные фонды) экономики;  $L$  – численность занятых в экономике;  $U$  – средний технологический уровень экономики;  $\alpha$ ,  $(1-\alpha)$  – коэффициенты факторной эластичности выпуска. Введем следующие предположения.

Предположим, во-первых, что инвестиции пропорциональны ВВП, базируясь на неокейнсианской концепции эндогенных (индуцированных) инвестиций, принятой в модели Харрода – Домара:

$$I = nY, \quad (2)$$

где  $I$  – инвестиции в основной капитал;  $n$  – норма накопления. Поскольку рассматривается двухфакторная производственная функция, то часть ВВП, расходуемая на воспроизводство капитала, равна норме

накопления, поэтому положим  $\alpha = n$ , и уравнение (1) можно записать в виде:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = n \frac{\dot{K}}{K} + (1-n)(l+u), \quad (3)$$

где  $l$  – темп прироста занятости,  $u$  – темп прироста НТП. Заменяем переменные  $Y$  и  $K$  в виде капиталотдачи  $y = \frac{Y}{K}$ , производная которой  $\dot{y} = \frac{\dot{Y}K - \dot{K}Y}{K^2}$  позволяет преобразовать (3) к виду:

$$\dot{y} = (1-n)y \left( l + u - \frac{\dot{K}}{K} \right). \quad (4)$$

Во-вторых, предположим пропорциональность темпа прироста капитала и коэффициента обновления капитала  $\frac{I}{K}$ :

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{I}{K} - \mu, \quad (5)$$

где  $\mu$  – коэффициент выбытия (амортизации) капитала. Предположение (5) следует из баланса капитала, использованного в модели Харрода – Домара: прирост капитала  $\dot{K}$  равен инвестициям за вычетом выбывшего капитала  $M$ , т. е.  $\dot{K} = I - M$ , что в относительной форме дает (5).

В-третьих, используем введенные С. В. Дубовским гипотезы [25] о пропорциональности динамики  $\mu$ ,  $l$  отклонению коэффициента обновления капитала от равновесного (трендового) значения:

$$\mu = \mu_0 k_0 \frac{I}{K}, \quad (6)$$

где  $\mu_0$  – стационарное значение коэффициента выбытия капитала;  $k_0$  – стационарное значение скорости обновления производственных фондов (отношения инвестиций к стоимости производственных фондов).

С целью объяснения феномена цикличности занятости была исследована взаимосвязь между темпом прироста занятости и нормой накопления основного капитала, отражающая концепцию трудосберегающего научно-технического прогресса Р. Солоу:

$$l = l_0 + l_1 n, \quad (7)$$

где  $l$  – темп прироста занятости;  $n = \frac{I}{Y}$  выражено из уравнения (2);  $l_0, l_1$  – константы,  $l_0$  соответствует темпу прироста занятости при отсутствии инвестиционного процесса (автономному приросту занятости),  $l_1 < 0$  отражает темп падения  $l$  вследствие инвестиционного процесса в экономике.

В-четвертых, предположим пропорциональность темпа прироста НТП темпу прироста отношения капиталотдачи к норме накопления  $\delta = \frac{y}{n} = \frac{Y^2}{KI}$ :

$$u = \frac{\dot{\delta}}{\delta}. \quad (8)$$

Гипотеза (8) выдвинута на основе таких концепций факторов НТП, как модель растущего разнообразия товаров [26], модель замещения ассортимента [27], модель импорта технологий [28], объясняющих НТП как процесс сокращения затрат ресурсов на производство новых продуктов. Модели приводят к двум факторам роста НТП: 1) эффекту увеличения ВВП при данном уровне капитала, формализуемому как рост капиталотдачи; 2) эффекту сокращения затрат капитала при данном уровне ВВП в виде снижения нормы накопления. Динамика  $u$ , определенного по (8), имеет колебательный характер, поскольку рост  $\delta$  вследствие относительного увеличения ВВП к капиталу и инвестициям приводит в тенденции к недокапитализации экономики, что впоследствии предопределяет спад ВВП по (1), а значит, и снижение  $\delta$ . В связи с этим введем следующую гармоническую модель НТП:

$$u = u_0 \sin(u_1 t + u_2), \quad (9)$$

где  $u_0, u_1, u_2$  – константы, интерпретируемые как амплитуда, частота и фаза колебаний темпа прироста НТП.

В-пятых, учитывая устойчивую связь нормы накопления и капиталотдачи, отмеченную [29] во всех фазах последнего большого цикла в экономике стран ОЭСР, введем предположение о линейной зависимости нормы накопления от капиталотдачи:

$$n = n_1 y + n_0, |n_1| < 1, \quad (10)$$

где  $n_0$  – трендовое значение нормы накопления;  $n_1$  – коэффициент опережения или замедления динамики нормы накопления по сравнению с трендом. В отличие от степенной функции  $n(y)$ , принятой С. В. Дубовским, гипотеза (10) позволяет упростить модель без существенной потери адекватности; линейная функция  $n(y)$  вытекает из анализа модели П. Рамсея – Д. Касса – Т. Купманса [30–32] для экономики в равновесии.

После преобразований (4) с учетом (2), (5) – (7), (9), (10), приведенных в приложении, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{y} = c_1(t)y + c_2(t)y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4, \quad (11)$$

коэффициенты которого рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (1 - n_0)(b + n_0 l_0), \\ c_2(t) &= n_0 a(1 - n_0) + n_1((1 - 2n_0)l_1 - b), \\ c_3 &= n_1[a(1 - 2n_0) - n_1 l_1], \quad c_4 = -an_1^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $b = l_0 + u_0 \sin(u_1 t + u_2)$ ,  $a = \mu_0 k_0 - 1$ .

Уравнение (11) позволяет описать динамику капиталотдачи, зависящую от относительно устойчивых параметров, характеризующих тенденции инвестиционных процессов и занятости, а также гармонической функции НТП. Правая часть уравнения представляет собой непрерывную функцию, дифференцируемую по  $u$ , следовательно, существует решение, которое далее найдено в численном виде.

### Результаты численного моделирования

Параметры модели определены на основе динамики реального ВВП, занятости, основных фондов и инвестиций в основные фонды за 1965–2016 гг. в России на базе официальных статистических данных<sup>1</sup>. При помощи эконометрического анализа с применением метода наименьших квадратов была проведена параметризация уравнений (2), (6), (7), (9) на основе статистики до 2014 г. [33]. С учетом данных до 2016 г. были получены значения параметров, представленные в табл. 1.

Анализ моделей (табл. 1) показал обратную взаимосвязь нормы накопления основного капитала ( $n$ ) и капиталотдачи ( $y$ ) для советского периода и прямую линейную зависимость для современной рыночной экономики. Наблюдалось изменение зависимости темпа прироста занятости ( $l$ ) от нормы накопления капитала ( $n$ ): сдвиг тренда в сторону снижения автономного темпа прироста занятости ( $l_0$ ). При анализе было выявлено, что в трансформационный период (1989–1999 гг.) зависимости  $n(y)$ ,  $l(n)$  не имели явного тренда, ввиду чего данный период был исключен. Полученные функциональные зависимости за 1965–1988 гг. и 2000–2016 гг. обладают достаточной степенью достоверности, о чем свидетельствуют значения коэффициента детерминации, приведенные в табл. 1.

Численное решение уравнения прироста капиталотдачи (11) с использованием рассчитанных параметров (табл. 1), которое было найдено при помощи математического моделирования в программной среде MatLab, представлено на рис. 1. На графике отражена фактическая динамика капиталотдачи, а также расчетные значения за период с 1965 до 2016 гг.

Таблица 1

Статистические оценки значения параметров моделей и их достоверности\*

Table 1. Statistical evaluation of the values of model parameters and their reliability\*

Модель / Model	Параметр / Parameter	Значение параметра для ретроспективного периода / Significance of the parameter for retrospective period		Коэффициент детерминации для ретроспективного периода $R^2$ / Determination coefficient for $R^2$ retrospective period	
		1965–1988 гг.	2000–2016 гг.	1965–1988 гг.	2000–2016 гг.
$n = n_1 y + n_0$	$n_0$	0,422	0,024	0,9	0,5
	$n_1$	-0,123	0,443		
$\mu = \mu_0 k_0 \frac{I}{K}$	$\mu_0 k_0$	0,779		0,9	
$l = l_0 + l_1 n$	$l_0$	0,0635	0,051	0,9	0,6
	$l_1$	-0,174	-0,174		
$u = u_0 \sin(u_1 t + u_2)$	$u_0$	0,053		0,6	
	$u_1$	0,148			
	$u_2$	0,997			

\* Источник: составлено авторами.

\* Source: compiled by the authors.

<sup>1</sup> Федеральная служба государственной статистики РФ. URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения: 16.03.2017); Народное хозяйство РСФСР. Проект «Исторические материалы». URL: <http://istmat.info/node/21356> (дата обращения: 16.03.2017).

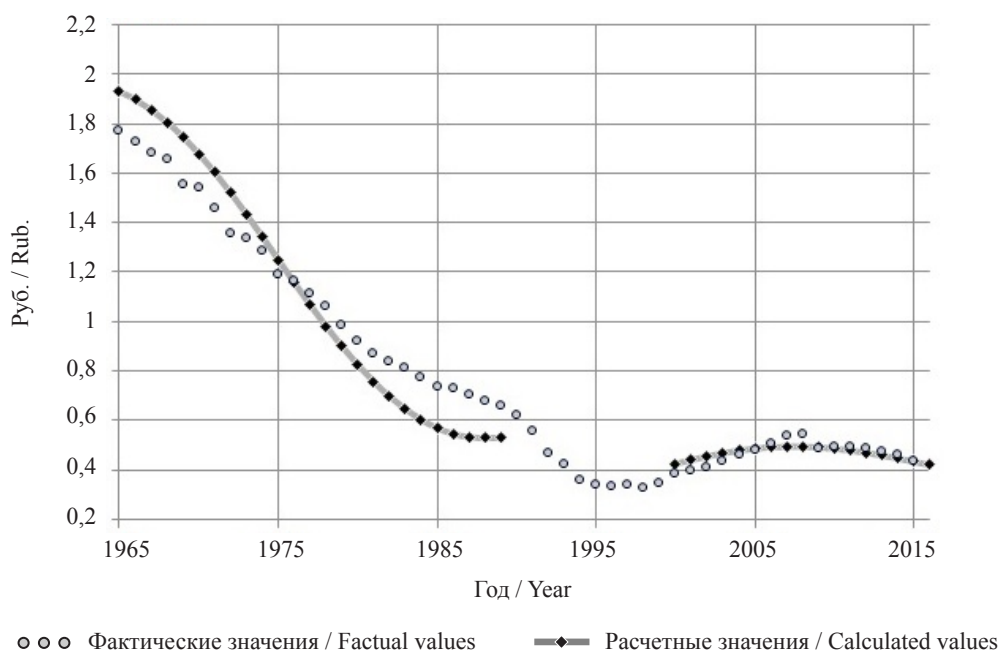


Рис. 1. Динамика фактических и расчетных значений капиталотдачи в 1965–2016 гг.\*

\*Источник: рассчитано авторами на основе [33, 34].

Fig. 1. The dynamics of the actual and calculated values of capital productivity in 1965–2016\*

\* Source: calculated by the authors on the basis of [33, 34].

Обобщенная модель (рис. 2) получена путем подбора аппроксимирующей функции, адекватной для двух временных интервалов (1965–1988 гг. и 2000–2016 гг.):

$$y = 9,732 \cdot 10^{25} \cdot e^{-0,030257t} 0,232 \sin(0,117 \cdot t + 3,414) \quad (13)$$

с коэффициентом детерминации, равным  $R^2 = 0,98$ .

Обобщенная модель показала наличие длинноволновых колебаний, не выявляемых при моделировании отдельных периодов (плановой и рыночной экономики) ввиду недостаточного объема выборки (24 и 17 лет в соответствующих периодах). Период гармонических колебаний для функции (14) равен:

$$T = \frac{2\pi}{0,117} \approx 54. \quad (14)$$

Таким образом, решение уравнения (11) представляет собой тренд и гармоническую функцию с периодом цикла, составляющим 54 года. Длинные волны были выявлены на основе различных ретроспективных данных как российскими, так и зарубежными

авторами в виде колебаний таких показателей, как ВВП (ВНП), национальный доход, динамика производства конкретных видов продукции, индексов цен и др. [34–41], периоды цикличности которых приведены в табл. 2. Полученная модель капиталотдачи (13) соответствует циклу Кондратьева как по длительности периода, так и по фундаментальной зависимости от динамики НТП.

Проведем проверку адекватности модели (13) принятым при моделировании предпосылкам (8) – (10). Найдем отношение капиталотдачи к норме накопления по модели капиталотдачи (13) и модели нормы накопления (10):

$$\delta = \frac{y}{n} = \frac{9,732 \cdot 10^{25} \cdot e^{-0,030257t} 0,232 \sin(0,117 \cdot t + 3,414)}{n_1 y + n_0}$$

Дифференцируя это выражение, получим с учетом (8) формулу темпа прироста НТП:

$$u = \frac{\dot{\delta}}{\delta} = 0,07 \sin(0,12t + 4,87). \quad (15)$$

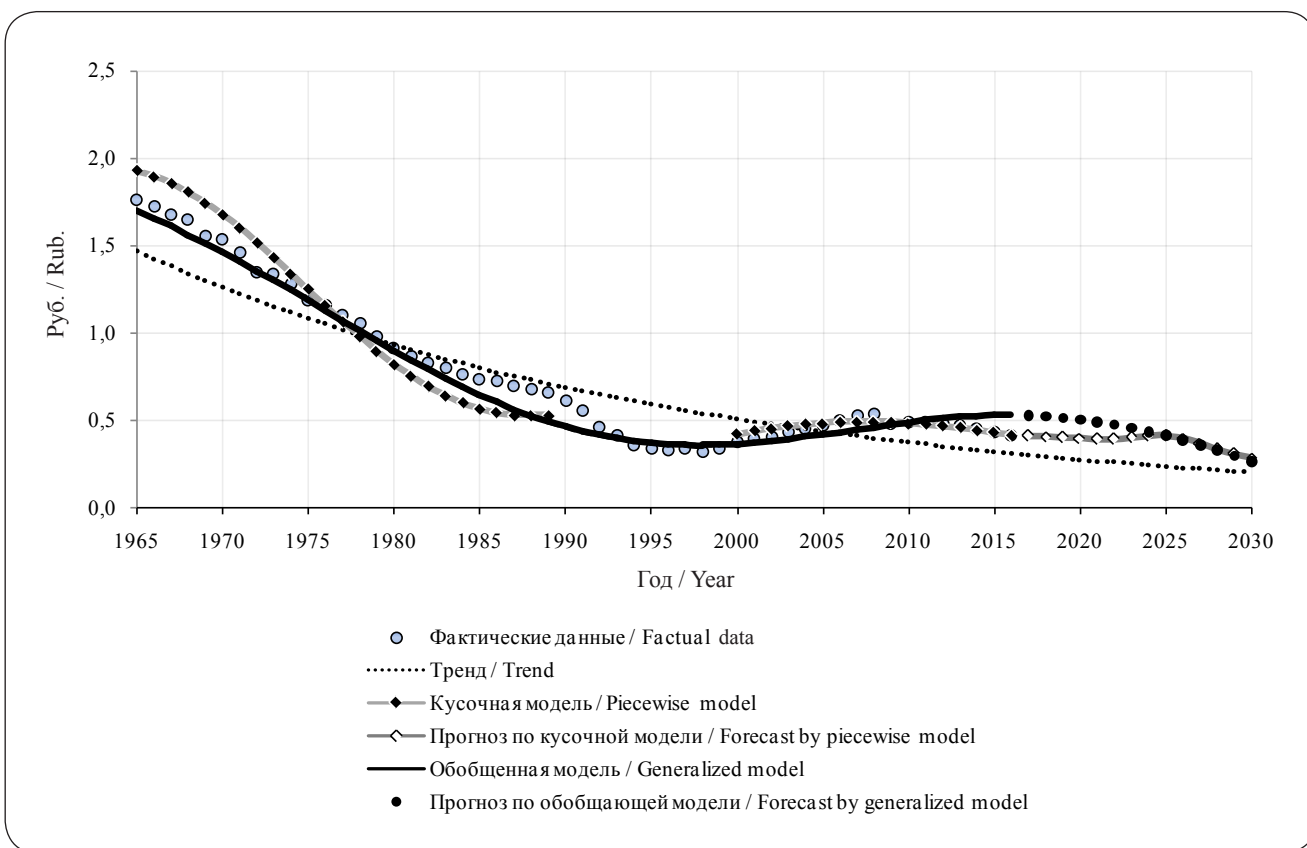


Рис. 2. Дробно-кусочная и обобщенная модели цикла капиталотдачи в экономике России в 1965–2016 гг. и прогнозы на 2017–2030 гг.\*

\* Источник: составлено авторами.

Fig. 2. Fractional piecewise and generalizing models of the capital productivity cycle in the Russian economy in 1965–2016 and forecasts for 2017–2030\*

\* Source: compiled by the authors.

Таблица 2

Оценка продолжительности длинноволновых колебаний экономической конъюнктуры разными авторами\*

Table 2. Estimation of duration of long-wave fluctuations of economic conjuncture by different authors\*

Исследователи / Researchers	Период цикла, лет / Cycle period, years
Н. Д. Кондратьев (1925) / N. D. Kondratiev (1925)	41–60
Й. А. Шумпетер (1939) / J. A. Schumpeter (1939)	55
Л. Дюприе (1947) / L. Dupre (1947)	47–58
Г. Менш (1971) / G. Mensch (1971)	50–60
Е. Мандель (1980) / E. Mandel (1980)	40–54
М. Хироока (2006) / M. Hirooka (2006)	51–57
В. И. Пантин и В. В. Лапкин (2006) / V. I. Pantin & V. V. Lapkin (2006)	46–58
С. Ю. Глазьев (2010) / S.Yu. Glazyev (2010)	44–57
Л. Е. Гринин и А. В. Коротаяев (2012) / L. E. Grinin & A. V. Korotayev (2012)	44–49

\* Источник: составлено авторами на основе [1, 36–43].

\* Source: compiled by the authors based on [1, 36–43].

Период цикла НТП (15) равен 54 годам, что согласуется с прогнозом по модели (13).

На основе моделей (13) и (15) построен фазовый портрет колебаний прироста капиталоотдачи  $dy$  и прироста параметра НТП  $du$  (рис. 3) при следующей модели НТП в дифференциальной форме:

$$\dot{u} = u_0 u_1 \cos(u_1 t + u_2). \quad (16)$$

Фазовый портрет демонстрирует циклы с постоянной амплитудой и периодов колебаний, имеющие фазовый сдвиг (запаздывание), которое приводит к смещению среднего показателя прироста капиталоотдачи – «точки стационарности». На графике видно, что на новом витке цикла средний показатель прироста капиталоотдачи перейдет в новое стационарное положение, соответствующее более высокому значению средних темпов прироста капиталоотдачи при убывающем тренде ее динамики. Эллипсоидный характер траектории колебаний относительно координатных осей показывает существенный сдвиг по фазе колебаний динамики капиталоотдачи и НТП.

На рис. 4 представлена динамика нормированных колебаний индикатора НТП и капиталоотдачи.

Рисунок 4 иллюстрирует сдвиг фаз гармоник НТП и капиталоотдачи, обусловленный временным лагом научно-технического и инвестиционного процессов. Падение капиталоотдачи, приводящее к снижению ВВП, создает мотивацию создания научно-технических разработок, направленных на повышение капиталоотдачи, но их создание и внедрение в практику требует определенного времени. С другой стороны, между началом инвестирования в обновление капитала на новой технической основе и моментом наибольших темпов отдачи от капитала также наблюдается временной лаг. В частности, фаза положительной динамики ВВП в России в 2000-е гг. сопровождалась повышением темпа прироста капиталоотдачи, а темпы прироста НТП с 2005 г. начали снижаться. Прогноз по модели показывает, что после 2020 г. прирост НТП будет отрицательным. Прогноз динамики капиталоотдачи следующий: максимальный прирост будет отмечен в 2018–2020 гг., после чего темпы прироста капиталоотдачи будут снижаться, и с 2030 г. прирост капиталоотдачи будет отрицательным. Падение капиталоотдачи приведет к снижению ВВП, что впоследствии создаст стимулы для перехода к повышательной фазе НТП.

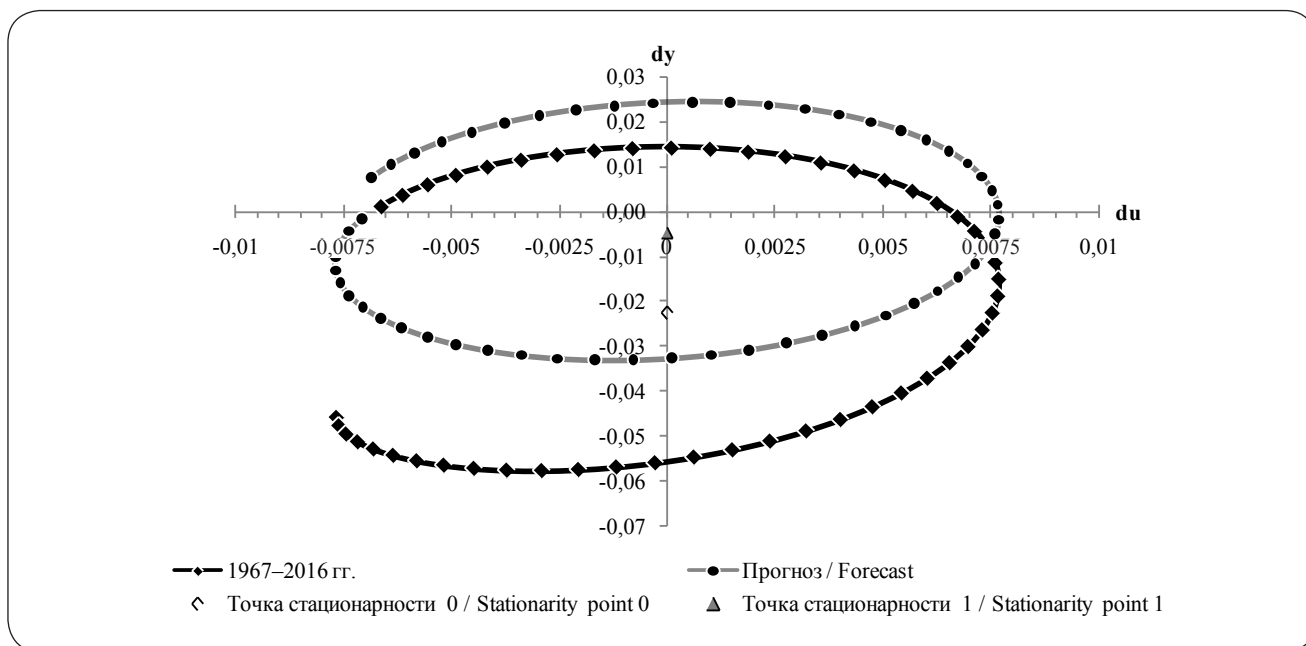


Рис. 3. Фазовый портрет цикла НТП и капиталоотдачи в экономике России\*

\* Источник: составлено авторами.

Fig. 3. Phase portrait of the scientific and technological progress and capital productivity cycle in the Russian economy\*

\* Source: compiled by the authors.



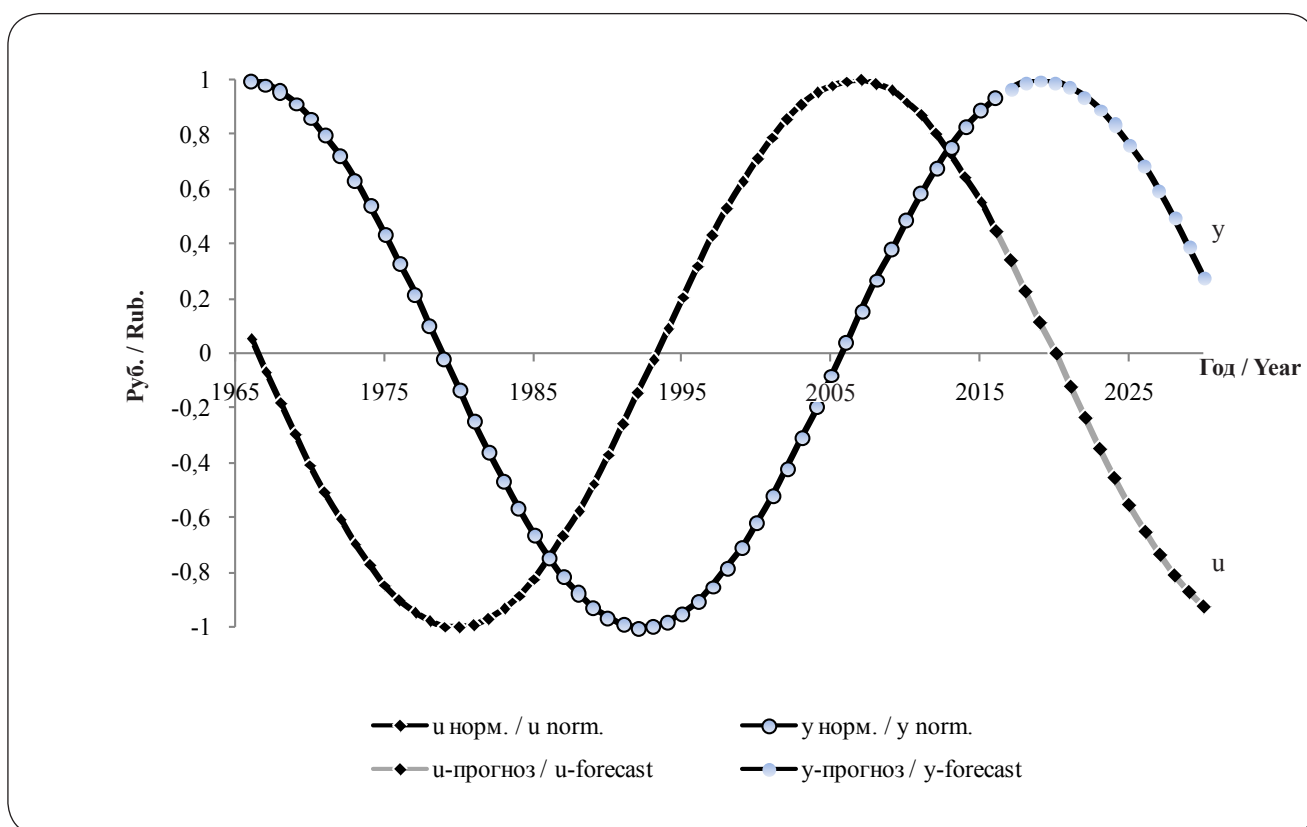


Рис. 4. Динамика нормированных колебаний показателей НТП и капиталотдачи\*

\* Источник: составлено авторами.

Fig. 4. Dynamics of normalized fluctuations of scientific and technological progress and capital productivity indicators\*

\* Source: compiled by the authors.

### Выводы

Разработана дифференциальная модель макроэкономической цикличности, описывающая динамику капиталотдачи как функцию параметра НТП. Предпосылками модели являлись неоклассическая производственная функция Р. Солоу с постоянной отдачей от масштаба, некейнсианская концепция индуцированных инвестиций, а также подтвержденные статистически гипотезы о функциональной природе процесса выбытия капитала и процесса изменения динамики занятости.

Разработанная модель апробирована на статистических данных по макроэкономическим показателям РФ за 1965–2016 гг., что показало достоверность данной модели и подтвердило возможность ее при-

менения для описания долгосрочной динамики капиталотдачи, являющейся важнейшим показателем эффективности экономики. Период циклических колебаний капиталотдачи составляет порядка 54 лет, что соответствует длинным волнам Н. Д. Кондратьева, предопределенным динамикой НТП.

Прогноз по модели демонстрирует, что при сохранении сложившихся в 1965–2016 гг. тенденций инвестиционной и инновационной активности индикатор НТП и капиталотдача будут иметь понижающую тенденцию в 2017–2030 гг. Следовательно, для обеспечения роста экономики РФ необходимы специальные масштабные меры по повышению нормы накопления, более интенсивной замене капитала и росту эффективности вновь вводимого основного капитала.

### Обоснование формулы (11)

Подставив (5) – (7), (9), в (4), получим:

$$\dot{y} = (1-n)y \left( l_0 + l_1 n + u_0 \sin(u_1 t + u_2) - \frac{I}{K} + \mu_0 k_0 \frac{I}{K} \right),$$

откуда с учетом (2) следует:

$$\dot{y} = (1-n)y [l_0 + l_1 n + u_0 \sin(u_1 t + u_2) + ny(\mu_0 k_0 - 1)].$$

После подстановки (10) получим:

$$\dot{y} = (1-n_0 - n_1 y) y \{ (n_0 + n_1 y) [l_1 + y(\mu_0 k_0 - 1)] + l_0 + u_0 \sin(u_1 t + u_2) \},$$

$$(П1) \quad \dot{y} = (1-n_0 - n_1 y) y [(n_0 + n_1 y)(ay + l_1) + b],$$

где  $a = \mu_0 k_0 - 1$ ,  $b = l_0 + u_0 \sin(u_1 t + u_2)$ .

Раскрывая скобки в (П1), получим:

$$\dot{y} = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4,$$

где коэффициенты  $c_1(t) = (1-n_0)(b + n_0 l_0) = (1-n_0)[l_0(n_0 + 1) + u_0 \sin(u_1 t + u_2)]$ ,

$$c_2(t) = n_0 a(1-n_0) + n_1((1-2n_0)l_1 - b) = n_0(1-n_0)(\mu_0 k_0 - 1) + n_1[(1-2n_0)l_1 - l_0 + u_0 \sin(u_1 t + u_2)],$$

$$c_3 = n_1[a(1-2n_0) - n_1 l_1] = n_1[(\mu_0 k_0 - 1)(1-2n_0) - n_1 l_1],$$

$$c_4 = -an_1^2 = (1-\mu_0 k_0)n_1^2 \text{ определяются по (12).}$$

### Список литературы

1. Кондратьев Н. Д. Большие циклы экономической конъюнктуры // Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. Избранные труды. М.: Экономика, 2002. 767 с.
2. Коротаев А. В., Гринин Л. Е. Кондратьевские волны в мир-системной перспективе // Кондратьевские волны. Аспекты и перспективы / А. А. Акаев, Р. С. Гринберг, Л. Е. Гринин, А. В. Коротаев, С. Ю. Малков. Волгоград: Учитель, 2012. С. 58–109.
3. Klinov V. G. The Evolution of Long Waves in the World Economy // Studies on Russian Economic Development. 2015. Vol. 26. № 3. Pp. 285–294.
4. Klinov V. G. World economy long cycle in XXI century // World Economy and International Relations. 2016. № 60 (12). Pp. 5–16.
5. Bernard L., Gevorkyan A. V., Palley T. I., Semmler W. Time scales and mechanisms of economic cycles: A review of theories of long waves // Review of Keynesian Economics. 2014. № 2 (1). Pp. 87–107.
6. Granger C. W. J., Watson M. W. Time series and spectral methods in econometrics // Handbook of Econometrics. Amsterdam: Elsevier. 1986. № 2. Pp. 979–1022.
7. Apostoaie C.-M., Percic S., Cocriş V., Chirleşan D. Research on the credit cycle and business cycle with a focus on ten states from central, eastern, and southeastern Europe // Emerging Markets Finance and Trade. 2014. № 50. Pp. 63–77.
8. Kufenko V., Geiger N. Business cycles in the economy and in economics: An econometric analysis // Scientometrics. 2016. № 107 (1). Pp. 43–69.
9. Harrod R. Scope and Method of Economics // Economic Journal. 1938. № 48 (Sept.). Pp. 383–412.
10. Domar E. D. Essays in the theory of economic growth. N.Y.: Oxford University Press, 1957. 272 p.
11. Solow R. M. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. № 70. Pp. 65–94.
12. Romer P. Increasing returns and long run growth // Journal of political economy. 1986. № 94. Pp. 1002–1037.
13. Lucas R. On the mechanics of economic development // Journal of monetary economics. 1988. № 22. Pp. 3–42.
14. Solow R.M. Growth theory: an exposition. Oxford: Oxford University Press. 1970. 109 p.

15. Devesh Raval. Beyond Cobb-Douglas: Estimation of a CES Production Function with Factor Augmenting Technology // Working Paper 11-05 (U.S. Census Bureau, Center for Economic Studies). February 2011. URL: <http://ideas.repec.org/p/cen/wpaper/11-05.html> (дата обращения: 23.01.2017).
16. Bianca C., Guerrini L. Existence of limit cycles in the solow model with delayed-logistic population growth // The Scientific World Journal, 2014. URL: <https://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/207806/> (дата обращения: 23.01.2017).
17. Dalgaard C.-J., Strulik H. The history augmented solow model // European Economic Review. 2013. № 63. Pp. 134–149.
18. Ferrara M., Guerrini L., Mavilia R. Modified neoclassical growth models with delay: A critical survey and perspectives // Applied Mathematical Sciences. 2013. № 7 (85–88). Pp. 4249–4257.
19. Yamarik S. State-level capital and investment: Updates and implications // Contemporary Economic Policy. 2013. № 31 (1). Pp. 62–72.
20. Li D.-H., Xia, E.-J. Research on influence of human capital on the economy growth based on the extended solow model / Paper presented at the International Conference on Management Science and Engineering // Annual Conference Proceedings, 2013, pp. 1460–1465.
21. Samuelson P. Interaction between the Multiplier Analysis and the principle of Acceleration // The Review of Economic Statistics. 1939. № 21. Pp. 75–78.
22. Goodwin R. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles // Econometrica. 1951. Vol. 19. № 1 (Jan.). Pp. 1–17.
23. Romer P. M. Endogenous technological change // Journal of Political Economy. 1990. Vol. 98. № 5. Part 2. Pp. 337–367.
24. Дубовский С. В. Объект моделирования – цикл Кондратьева // Математическое моделирование. 1995. Т. 7. № 6. С. 65–74.
25. Дубовский С. В. Новые модели инвестиционных и технологических циклов в экономике // Экономический рост и циклы. М.: ВНИИСИ. 1991. Вып. 12. С. 4–13.
26. Romer P. M. Increasing Returns and Long-Run Growth // Journal of Political Economy. 1986. Vol. 94, October. Pp. 1002–1037.
27. Aghion P., Howitt P. Model of Growth Through Creative Destruction // Econometrica. 1992. № 60 (March). Pp. 323–351.
28. Easterly W., King R., Levine R., Rebelo S. Policy, technology adoption and growth in R. Solow and L. Pasinetti (eds.) "Economic Growth and the Structure of Long Term Development" // International Economic Association (IEA) Conference 112. 1994. Pp. 75–89.
29. Клинов В. Г. Научно-технический прогресс и большие циклы конъюнктуры мирового хозяйства // Проблемы прогнозирования. 2003. № 1. С. 118–135.
30. Ramsey P. Mathematical Theory of Saving // Economic Journal. 1928. Vol. 38. No. 152 (Dec.). Pp. 543–559.
31. Cass D. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation // Review of Economic Studies. 1965. Vol. 32. No. 3 (Jul.). Pp. 233–240.
32. Koopmans T. On the Concept of Optimal Economic Growth // The Economic Approach to Development Planning. Amsterdam: Elsevier. 1965. Pp. 225–287.
33. Гераськин М. И., Порубова П. В. Трендовый анализ динамики макроэкономических показателей Российской Федерации в 1956–2014 гг. // Вестник Самарского государственного экономического университета. 2017. № 4. С. 5–18.
34. Schumpeter J. A. Business Cycles. A Theoretical, Historical and Statistical Analysis of the Capitalist Process. N. Y.: McGraw-Hill Book Company, 1939. 461 p.
35. Dupriez L. H. Des Mouvements Economiques Generaux. Vol. 2. Pt. 3. Louvain: Institut de Recherches de Louvain Economiques et Sociales de L'universite, 1947.
36. Менш Г. О динамике технического прогресса // Журнал экономики предприятия. 1971. № 41. С. 295–314.
37. Mandel E. Long Waves of Capitalist Development: The Marxist Interpretation. New York: Cambridge University Press, 1980. 184 p.
38. Hirooka M. Innovation Dynamism and Economic Growth. A Nonlinear Perspective. Cheltenham, Northampton: Edward Elgar, 2006. 448 p.
39. Пантин В. И., Лапкин В. В. Философия исторического прогнозирования: Ритмы истории и перспективы мирового развития. Дубна: Феникс+, 2006. 448 с.
40. Глазьев С. Ю. Стратегия опережающего развития России в условиях глобального кризиса. М.: Экономика, 2010. 255 с.
41. Гринин Л. Е., Коротаев А. В. Циклы, кризисы, ловушки современной Мир-системы. М.: Либроком, 2012. 480 с.

## References

1. Kondratiev N. D. Large cycles of economic conjuncture, *Large cycles of conjuncture and the theory of anticipation. Selected works*, Moscow: Ekonomika, 2002. 767 p. (in Russ.).
2. Akaev A. A., Grinberg R. S., Grinin L. E., Korotaev A. V., Malkov S. Yu. *Kondratiev waves in the world-systems prospect. Kondratiev waves. Aspects and prospects*, Volgograd: Uchitel', 2012, pp. 58–109 (in Russ.).

3. Klinov V. G. The Evolution of Long Waves in the World Economy, *Studies on Russian Economic Development*, 2015, vol. 26, No. 3, pp. 285–294.
4. Klinov V. G. World economy long cycle in XXI century, *World Economy and International Relations*, 2016, No. 60 (12), pp. 5–16.
5. Bernard L., Gevorkyan A. V., Palley T. I., Semmler W. Time scales and mechanisms of economic cycles: A review of theories of long waves, *Review of Keynesian Economics*, 2014, No. 2 (1), pp. 87–107.
6. Granger C. W. J., Watson M. W. Time series and spectral methods in econometrics, *Handbook of Econometrics*, 1986, No. 2, pp. 979–1022.
7. Apostoae C.-M., Percic S., Cocriş V., Chirleşan D. Research on the credit cycle and business cycle with a focus on ten states from central, eastern, and southeastern Europe, *Emerging Markets Finance and Trade*, 2014, No. 50, pp. 63–77.
8. Kufenko V., Geiger N. Business cycles in the economy and in economics: An econometric analysis, *Scientometrics*, 2016, No. 107 (1), pp. 43–69.
9. Harrod R. Scope and Method of Economics, *Economic Journal*, 1938, No. 48 (Sept.), pp. 383–412.
10. Domar E. D. *Essays in the theory of economic growth*, N.Y.: Oxford University Press, 1957, 272 p.
11. Solow R. M. A contribution to the theory of economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, 1956, No. 70, pp. 65–94.
12. Romer P. Increasing returns and long run growth, *Journal of political economy*, 1986, No. 94, pp. 1002–1037.
13. Lucas R. On the mechanics of economic development, *Journal of monetary economics*, 1988, No. 22, pp. 3–42.
14. Solow R. M. *Growth theory: an exposition*. Oxford: Oxford University Press, 1970, 109 p.
15. Devesh Raval. Beyond Cobb-Douglas: Estimation of a CES Production Function with Factor Augmenting Technology, *Working Paper 11-05 (U.S. Census Bureau, Center for Economic Studies)*, February 2011, available at: <http://ideas.repec.org/p/cen/wpaper/11-05.html> (access date: 23.01.2017).
16. Bianca C., Guerrini L. Existence of limit cycles in the solow model with delayed-logistic population growth, *The Scientific World Journal*, 2014, available at: <https://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/207806/> (access date: 23.01.2017).
17. Dalgaard C.-J., Strulik H. The history augmented solow model, *European Economic Review*, 2013, No. 63, pp. 134–149.
18. Ferrara M., Guerrini L., Mavilia R. Modified neoclassical growth models with delay: A critical survey and perspectives, *Applied Mathematical Sciences*, 2013, No. 7 (85–88), pp. 4249–4257.
19. Yamarik S. State-level capital and investment: Updates and implications, *Contemporary Economic Policy*, 2013, No. 31 (1), pp. 62–72.
20. Li D.-H., Xia, E.-J. Research on influence of human capital on the economy growth based on the extended solow model / *Paper presented at the International Conference on Management Science and Engineering, Annual Conference Proceedings*, 2013, pp. 1460–1465.
21. Samuelson P. Interaction between the Multiplier Analysis and the principle of Acceleration, *The Review of Economic Statistics*, 1939, No. 21, pp. 75–78.
22. Goodwin R. The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles, *Econometrica*, 1951, vol. 19, No. 1 (Jan.), pp. 1–17.
23. Romer P. M. Endogenous technological change, *Journal of Political Economy*, 1990, vol. 98, No. 5, part 2, pp. 337–367.
24. Dubovskii S. V. Kondratiev cycle as an object of modeling, *Matematicheskoe modelirovanie*, 1995, vol. 7, No. 6, pp. 65–74 (in Russ.).
25. Dubovskii S. V. New models of investment and technology cycles in economy, *Ekonomicheskii rost i tsikly*, 1991, is. 12, pp. 4–13 (in Russ.).
26. Romer P. M. Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of Political Economy*, 1986, is. 94, October, pp. 1002–1037.
27. Aghion P., Howitt P. Model of Growth Through Creative Destruction, *Econometrica*, 1992, No. 60 (March), pp. 323–351.
28. Easterly W., King R., Levine R., Rebelo S. Policy, technology adoption and growth. In R. Solow and L. Pasinetti (eds.) *Economic Growth and the Structure of Long Term Development, International Economic Association (IEA) Conference 112*, 1994, pp. 75–89.
29. Klinov V. G. Scientific-technical progress and large cycles of conjuncture of the global economy, *Problemy prognozirovaniya*, 2003, No. 1, pp. 118–135 (in Russ.).
30. Ramsey P. Mathematical Theory of Saving, *Economic Journal*, 1928, vol. 38, No. 152 (Dec.), pp. 543–559.
31. Cass D. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies*, 1965, vol. 32, No. 3 (Jul.), pp. 233–240.
32. Koopmans T. On the Concept of Optimal Economic Growth, *The Economic Approach to Development Planning*, Amsterdam: Elsevier, 1965, pp. 225–287.
33. Geras'kin M. I., Porubova P. V. Trend analysis of the dynamics of macroeconomic indicators of the Russian Federation in 1959–2014, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta*, 2017, No. 4, pp. 5–18 (in Russ.).
34. Schumpeter J. A. *Business Cycles. A Theoretical, Historical and Statistical Analysis of the Capitalist Process*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1939, 461 p.

35. Dupriez L. H. *Des Mouvements Economiques Generaux*, vol. 2, part 3, Louvain: Institut de Recherches de Louvain Economiques et Sociales de L'universite, 1947.
36. Mensh G. On the dynamics of technical progress, *Zhurnal ekonomiki predpriyatiya*, 1971, No. 41, pp. 295–314 (in Russ.).
37. Mandel E. *Long Waves of Capitalist Development: The Marxist Interpretation*, New York: Cambridge University Press, 1980, 184 p.
38. Hirooka M. *Innovation Dynamism and Economic Growth. A Nonlinear Perspective*, Cheltenham, Northampton: Edward Elgar, 2006, 448 p.
39. Pantin V. I., Lapkin V. V. *Philosophy of historical forecasting. Rhythms of history and prospects of global development*, Dubna: Feniks+, 2006, 448 p. (in Russ.).
40. Glaz'ev S. Yu. *Strategy of priority development of Russia under the global crisis*, Moscow: Ekonomika, 2010, 255 p. (in Russ.).
41. Grinin L. E., Korotaev A. V. *Cycles, crises, traps of the modern World-systems*, Moscow: Librokom, 2012, 480 p. (in Russ.).

Дата поступления / Received 19.05.2017

Дата принятия в печать / Accepted 27.06.2017

Дата онлайн-размещения / Available online 25.09.2017

© Гераськин М. И., Порубова П. В., 2017

© Geraskin M. I., Porubova P. V., 2017

#### Информация об авторах

**Гераськин Михаил Иванович**, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой математических методов в экономике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева  
Адрес: 443086, г. Самара, ул. Лукачева, 45, тел.: +7 (846) 267-44-96  
E-mail: innovation@ssau.ru  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0381-5830>  
Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/F-9518-2016>

Контактное лицо:

**Порубова Полина Владимировна**, аспирант кафедры математических методов в экономике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева  
Адрес: 443086, г. Самара, ул. Лукачева, 45, тел.: +7 (846) 267-44-96  
E-mail: por-polina@yandex.ru  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0621-1111>  
Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/H-8970-2017>

#### Information about authors

**Mikhail I. Geraskin**, Doctor of Economics, Professor, Head of the Department of Mathematical Methods in Economics, Samara National Research University named after academician S.P. Korolev  
Address: 45 Lukacheva str., 443086 Samara, Russia, tel.: +7 (846) 267-44-96  
E-mail: innovation@ssau.ru  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0381-5830>  
Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/F-9518-2016>

Contact:

**Polina V. Porubova**, post-graduate student of the Department of Mathematical Methods in Economics, Samara National Research University named after academician S.P. Korolev  
Address: 45, Lukacheva str., 443086 Samara, Russia, tel.: +7 (846) 267-44-96  
E-mail: por-polina@yandex.ru  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0621-1111>  
Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/H-8970-2017>