ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ / MATHEMATICAL AND INSTRUMENTAL METHODS IN ECONOMICS

УДК 330.11.4:330.3

DOI: http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.10.2016.3.69-82

С. Б. КУЗНЕЦОВ[1]

[1] *Сибирский институт управления Российской академии народного хозяйства и государственной службы, г. Новосибирск, Россия*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЦИКЛОВ В ЭКОНОМИКЕ

Цель: доказательство существования и выявление условий возникновения плоской волны при инвестировании в возобновляемые факторы производства.

Методы: абстрагирование, экономико-математическое моделирование.

Результаты: цикличность в экономике изучена и доказана во многих исследованиях, однако большинство из них основано на эмпирическом материале без аналитических доказательств. Автор в статье доказывает существование плоской волны, которая возникает в результате возобновления факторов производства. В качестве факторов определены физический капитал, объем трудовых ресурсов и человеческий капитал.

На основе векторного анализа доказано, что плоская волна возникает в случае потенциальности инвестиций и выполнении условия: скорость инвестирования в возобновляемые факторы производства должна быть пропорциональна относительно скоростей факторов производства. Определено, что в случае изменения скорости финансирования какого-либо из факторов будет иметь место изменение развития других факторов производства, т. е. появление вихря. Сформированная система уравнений изменения скорости факторов производства в векторном виде была решена с помощью плоской волны при условии параллельности любых двух векторов. На основе доказанного утверждения был сделан вывод о том, что цикличность является естественным развитием экономики.

Научная новизна: на основе векторного анализа доказано существование плоской волны в развитии факторов производства.

Практическая значимость: зная динамику плоской волны, ее длину и амплитуду, можно определять моменты времени ужесточения и ослабления налогово-фискальной политики для регулирования инвестиций в факторы производства.

Ключевые слова: математические и инструментальные методы экономики; динамический ротор; факторы производства; плоская волна; инвестиции

Как цитировать статью: Кузнецов С. Б. Моделирование возникновения циклов в экономике // Актуальные проблемы экономики и права. 2016. Т. 10, № 3. С. 69–82. DOI: http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.10.2016.3.69-82

Актуальные проблемы экономики и права. 2016. Т. 10, № 3
Actual Problems of Economics and Law, 2016, vol. 10, No. 3
ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Введение

Анализ экономического роста с помощью факторов производства является одной из главных задач макроэкономической теории. Математические модели представляют собой упрощение реального экономического процесса и выражаются в виде уравнений и графиков. При моделировании реальных процессов делается ряд допущений, что искажает картину действительности, но дает возможность анализа отдельных сторон и закономерностей экономики.

Основная масса первых моделей роста предполагала, что изменение объема производства происходит под влиянием изменения основных факторов производства – физического капитала и труда.

Наиболее простыми кейнсианскими моделями роста являются модели Р. Ф. Харрода [1] и Е. Домара [2]. Они хорошо себя зарекомендовали при описании роста экономики в период 1920–1950 гг. Но уже в период 1950–1970 гг. реально моделировала экономический рост неоклассическая модель Р. Солоу [3], которая была основана на производственной функции Кобба – Дугласа.

Главные эмпирические достижения этого времени были сформулированы Николасом Калдором в виде «стилизованных фактов» [4]:

– Объем производства на душу населения растет, но темп его роста замедляется.

– Капиталовооруженность имеет тенденцию роста во времени.

– Норма доходности капитала является почти постоянной величиной.

– Величина отношения физического капитала к объему производства является почти константой.

– Доли физического капитала и труда в национальном доходе представляют собой почти константы.

– В разных странах темпы роста производительности труда могут существенно различаться.

Эти факты остаются справедливыми до сих пор и не противоречат неоклассической теории роста. Более того, в значительной степени в рамках модели непротиворечиво существует гипотеза Барро об условной конвергенции, утверждающая постепенное сближение развития стран [5–6].

Своеобразным черным ящиком неоклассической модели остался технический прогресс. Технические изменения носят экзогенный характер, нет строгих объяснений их источников, причин, путей распространения, характера реализации.

Пол Ромер предложил в дополнение предыдущим новые стилизованные факты [7]:

– Средние темпы роста не имеют связи с доходами на душу населения.

– Между ростом международной торговли и темпом роста производства существует положительная корреляция.

– Между ростом населения и уровнем дохода на душу населения наблюдается отрицательная корреляционная связь.

– Работники вне зависимости от квалификации стараются мигрировать в более богатые страны.

– Рост капитала не в состоянии объяснить рост производства.

Среди процессов накопления капитала и изменения факторов производства следует выделить группы исследований, связанных с поисками движущих сил технического прогресса и его основ, базирующихся на развитии уровня науки, техники и образования. Широкий круг эмпирических исследований обнаруживает прямую связь между образованием и экономическим ростом и является эмпирической основой для создания моделей, учитывающих влияние человеческого капитала.

Некоторым итогом современных эмпирических исследований являются «стилизованные» факты, которые сформулировали В. Истерли и Р. Левин [8]:

– Накопление факторов не является определяющим для перекрестных различий при оценке уровня экономического роста. Но общая производительность факторов играет решающую роль при объяснении различия в росте. Дивергенция стала реальностью на больших интервалах времени. Наблюдаются огромные и продолжающие увеличиваться различия в объемах ВВП на душу населения при анализе различных стран.

– Рост экономики не является устойчивым во времени, но накопление капитала стабильно и постоянно.

– Факторы производства взаимовлияют друг на друга и растут одновременно.

– Долгосрочный экономический рост определяется параметрами национальной политики.

Неоклассическая теория не может объяснить эти факты. Возможно, это является основанием для развития теоретических эндогенных моделей роста. В первых моделях этого направления пытались найти внутренние источники постоянного роста. Эти модели достаточно широко трактовали источники роста,

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

вводя обучение на практике и эффекты человеческого капитала, что являлось объяснением отсутствия убывания предельной производительности.

Некоторую классификацию исходных эндогенных моделей технического прогресса можно построить, отталкиваясь от типов ресурсов роста знаний, предложенную Бояном Джовановичем [9] и сформулированную в работе [10]:

1. Первая группа моделей занимается исследованием производства инноваций как продукта, который производится особым сектором экономики – научные исследования и разработки (R & D). В зависимости от типа и сферы инновационных изменений имеются подразделы:

1.1.1. Горизонтальная модель технологических изменений в промежуточном продукте П. Ромера – расширение количества и разнообразия [11].

1.1.2. Вертикальная модель технологических изменений Агиона и Хауитта – улучшение качества промежуточного продукта [12–13].

1.2.1. Горизонтальная модель технологических изменений в конечном продукте Гроссмана и Хелпмана – изменения разнообразия, количества, ассортимента [14–15].

1.2.2. Вертикальная модель технологических изменений Гроссмана и Хелпмана – изменение качества [15].

2. Деятельность, направленная на увеличение человеческого капитала (модели Роберта Лукаса и Мэнкью-Д. Ромера-Вейла), является второй группой моделей [16–20].

3. Группа моделей обучения на практике модели Сержио Ребело и Роберта Барро [21–22].

4. Модели Гроссмана и Хелпмана, Базу и Вейла, Барро и Сама-и-Мартина, описывающие связь между международной торговлей и распространением технологий [15, 23–24].

5. Модели Майкла Кремера и Джонса, связывающие технический прогресс и население [25–27].

6. Модели экономического роста и неравенства Ролану Бенабоу, Алесина и Родрик [28–32].

7. Последняя группа моделей показывает связь экономического роста и политики (включая все перечисленные выше вариации данной темы) [33].

Ввиду того, что рост экономики не является устойчивым во времени, возникают проблемы моделирования цикличности. Вопросам изучения и доказательства естественности цикличности в экономике посвящено большое количество работ. В экономической волновой динамике выделяются следующие виды циклов: политико-деловой – 4–5 лет, деловой – 6–12 лет, строительный (цикл Кузнеца) – 15–22 года, кондратьевский – 45–65 лет. Длинные волны в развитии производства впервые обнаружил и исследовал Н. Д. Кондратьев [34], его работы развили E. Händeler [35–36], S. Schulmeister [37], Š. Daniel [38], A. Korotayev, S. Tsirel [39]. Опираясь на статистический материал по промышленному производству США и Великобритании, Д. Кондратьев показал регулярность 50–60-летних изменений цен и в целом всего производства. Й. Шумпетер плодотворно применил его идеи в теории инноваций [40]. С математической точки зрения эти волны являются волнами плоского типа. Р. Эллиотт разработал теорию развития финансовых рынков в виде распознаваемых моделей. В своей работе он отметил возникновения плоской волны при анализе финансовых рынков [41]. Существование волн в перечисленных работах доказывалось на базе эмпирического материала, и не было аналитического доказательства. Появление плоской волны не случайно, оно является естественным элементом развития экономики.

Обилие направлений в моделировании экономического роста указывает на неполное понимание развития основных факторов производства. Перспективы будущего экономического развития варьируются в широком диапазоне в зависимости от факторов, которые являются приоритетными в промышленной политике.

Существует необходимость адаптации математического аппарата, применяемого в естественных науках для исследования поведения и механизмов управления факторами производства, что объясняет научную и практическую значимость предлагаемого исследования.

Статья организована следующим образом: в первом пункте даются основные понятия и постановка задачи. Второй пункт посвящен выводу уравнения скорости изменения факторов производства с учетом явлений турбулентности в экономике и доказательству существования плоской волны в развитии факторов производства при некоторых ограничениях на скорость инвестирования. В последнем пункте обсуждается применение полученного результата и направления дальнейших исследований.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Постановка задачи

Рассмотрим пространство Ω, которое определяется временем *t*, физическим капиталом *K*, объемом трудовых ресурсов *L* и человеческим капиталом *H*. Классическое уравнение изменения физического капитала имеет вид: $\frac{dK}{dt} = I_K$, инвестиции предполагаются чистыми. Инвестиции вкладываются не только в физический капитал, но и в трудовые ресурсы и человеческий капитал, поэтому имеют место равенства $\frac{dL}{dt} = I_L$, $\frac{dH}{dt} = I_H$, естественно, с экономической точки зрения такое возможно для некоторой идеальной экономики. Под идеальной будем понимать экономику, в которой выполняются эти три уравнения, и векторная запись их будет выглядеть следующим образом: $\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}(\overline{r}, t) = (v_L, v_K, v_H) = I$ и представляет собой скорость обновления факторов в этой точке. Здесь $\overline{v}$ – скорость изменения факторов производства, $\overline{r} = (L, K, H)$. При непропорциональном увеличении или уменьшении финансирования факторов производства возникают диспропорции в векторе развития этих факторов.

Рассмотрим случай зависимости экономики от двух факторов (физический капитал и трудовые ресурсы). При приблизительно одинаковом уровне скорости финансирования каждого из факторов развития экономики получим некоторый вектор $\overline{v}_0$. При более интенсивном финансировании трудовых ресурсов вектор скорости отклонится в сторону оси трудовых ресурсов, т. е. произойдет изменение направления вектора $\overline{v}_0$. Другим проявлением вращательного развития является взаимовлияние факторов производства друг на друга. Если мы пропорционально инвестируем трудовые ресурсы и человеческий капитал, то создание благоприятных условий для трудовых ресурсов косвенно начинает влиять на развитие человеческого капитала. Понятно, что есть и обратное влияние, все это приводит к изменению направления вектора развития факторов производства, т. е. появлению вихря. Вихрь (ротор) характеризует в некотором смысле вращательную составляющую поля скоростей в соответствующих точках и выражается через динамический ротор [42, с. 39]. Понятие вихря ввел Р. Декарт в середине XVII в.

Таким образом, возможны две составляющие в скорости развития факторов производства: первая определяет поступательное развитие экономики $\overline{v}_0$, вторая оценивает влияние факторов производства друг на друга и диспропорции, возникающие при инвестировании в факторы $\overline{\varpi} \times \overline{r}$. Распределение скоростей различных элементов экономики с учетом вращательного развития имеет вид: $\overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{\varpi} \times \overline{r}$ или в покомпонентной записи: $v_L = v_{0L} + \varpi_K H - \varpi_H K$, $v_K = v_{0K} + \varpi_H L - \varpi_L H$, $v_H = v_{0H} + \varpi_L K - \varpi_K L$, где $\overline{\varpi}$ – вектор угловой скорости обновления факторов производства, который показывает скорость угла поворота вектора. Например, при изменении объемов финансирования в какой-либо из исследуемых факторов.

Введем понятие динамического градиента (*GRAD*) – это связано с тем, что при классическом определении (*grad*) нахождение производной по некоторому направлению не зависит от времени. Понятно, что в динамических задачах любое дифференцирование по заданному направлению связано с перемещением и, значит, с изменением времени. При изучении экономических показателей это замечание становится существенным, так как в каждый промежуток времени идет изменение объемов факторов производства, следовательно, постоянно меняются градиенты в точках поверхности. Поэтому градиенты, возникающие в динамических задачах экономики, не могут быть описаны статическими величинами.

Пусть имеется скалярное поле экономического показателя $\varphi(\overline{r}, t) = \varphi(L, K, H, t)$, обладающего существующими и непрерывными производными. Выберем некоторую точку поля $D(\overline{r}, t)$ и рассмотрим ее движение в нашем поле. Предположим, что $\overline{s}$ – единичный вектор направления развития. На траектории развития возьмем соседнюю точку $D'(\overline{r} + \varepsilon\overline{s}, t + \Delta t)$, в которую переместится исходная $D(\overline{r}, t)$ через промежуток времени Δt. Будем предполагать, что $\varepsilon = DD'$ является малой величиной, которая связана с малым изменением времени Δt. Рассмотрим производную функции $\varphi(\overline{r}, t)$ по направлению $\overline{s}$ в точке $D(\overline{r}, t)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi(D') - \varphi(D)}{\varepsilon}.$$

Вычисление производной $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ для любого направления $\overline{s}$ означает знание во всех соседних с точкой $D(\overline{r}, t)$ значений функции φ с точностью до членов второго порядка малости. В нашей системе координат единичный вектор $\overline{s}$ имеет составляющие:

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

$s_L = \cos(s, L)$, $s \quad \cos(s, K)$, $s_H = \cos(s, H)$. Представим разность значений функции в виде:

$$\varphi(D') - \varphi(D) = \varphi(\overline{r} + \varepsilon\overline{s}, t + \Delta t) - \varphi(\overline{r} + \varepsilon\overline{s}, t) +$$
$$+ \varphi(\overline{r} + \varepsilon\overline{s}, t) - \varphi(\overline{r}, t) = \varphi(\overline{r} + \varepsilon\overline{s}, t + \Delta t) -$$
$$- \varphi(\overline{r} + \varepsilon\overline{s}, t) + \varphi(L + \varepsilon\cos(\overline{s}, L), \quad K +$$
$$+ \varepsilon\cos(\overline{s}, K), \quad H + \varepsilon\cos(\overline{s}, H)) - \varphi(\overline{r}, t).$$

Это выражение можно рассматривать как сложную функцию от ε и изменения времени Δt. Разложим ее в ряд Тейлора с остаточным членом по формуле Пеано. Будем ограничиваться членом, содержащим первую степень Δt и ε:

$$\varphi(D') - \varphi(D) = \Delta t\left[\frac{\partial\varphi(\overline{r} + \varepsilon\overline{s}, t)}{\partial t} + o(\Delta t)\right] +$$
$$+\varepsilon\left[\frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial L}\cos(\overline{s}, L) + \frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial K}\cos(\overline{s}, K) + \frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial H}\cos(\overline{s}, H) + \varepsilon\right].$$

Обновления факторов производства в пространстве определяются из векторного равенства: $\varepsilon\overline{s} = \overline{v}\Delta t$. Умножим скалярно обе части равенства на вектор скорости $\Delta = \dfrac{\varepsilon\overline{s}\cdot\overline{v}}{|\overline{\ }|}$, где $|\overline{v}| = \sqrt{(v_L)^2 + (v_K)^2 + (v_H)^2}$, $\overline{s}\cdot\overline{v} =$
$= s_L v_L + s_K v_K + s_H v_H$.

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(D') - \varphi(D)}{\varepsilon} = \left(\frac{v_L}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial L}\right)\cos(\overline{s}, L) +$$
$$+\left(\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial K}\right)\cos(\overline{s}, K) +$$
$$+\left(\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial H}\right)\cos(\overline{s}, H).$$

Динамическим градиентом назовем вектор:

$$GRAD(\varphi) = \nabla_t\varphi = \left(\frac{v_L}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial L}, \frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial t} +\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial K}, \; \frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\overline{r}, t)}{\partial H}\right).$$

Этот вектор не зависит от выбора системы координат, так как его компоненты по любому направлению были определены непосредственно.

Например, динамический градиент от валового продукта представляет собой вектор предельных эффективностей факторов производства плюс вектор долевых вкладов скоростей факторов в скорость изменения валового продукта:

$$\nabla_t Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial L}, \frac{\partial Y}{\partial K}, \frac{\partial Y}{\partial H}\right) + \left(\frac{v_L}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial Y}{\partial t}\right) = GRAD(Y).$$

Рассмотрим некоторую фиксированную точку $D(\overline{r}_0, t_0)$ пространства факторов производства. Для удобства перенесем ее в начало координат, а также расположенный вблизи точки $D(\overline{r}_0, t_0)$ бесконечно малый контур *C* в пространстве факторов производства, на котором задано направление обхода. Предположим, что соответствующий поверхности *S*, натянутой на контур *C*, $\overline{n}$ – вектор нормали к поверхности, вектор $\overline{S} = S\,\overline{n}$ со временем стремится к нулю, по направлению к фиксированному вектору $\overline{n}_0$, начиная с момента времени t_0.

Согласно классическому определению, ротором называется предел [43, с. 168]:

$$ROT(\overline{F}) = \lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \overline{F}(\overline{r}, t)\cdot d\overline{r}}{S}.$$

$S \to 0$ означает, что $t - t_0 = \Delta t \to 0$. Этот предел является вихрем (ротором) векторного экономического показателя $\overline{F}(\overline{r}, t) \quad (F_L(\overline{r}, t), F_K(\overline{r}, t), F_H(\overline{r}, t))$.

Найдем аналитическое представление потока вихря экономического показателя с учетом времени. Для этого разложим каждую компоненту вектора показателя $\overline{F}(\overline{r}, t)$ в окрестности начальной точки $D(\overline{r}_0, t_0)$:

$$F_L(\overline{r}, t) = F_L(\overline{r}_0, t_0) + \Delta L\left(\frac{\partial F_L}{\partial L} + o(\Delta L)\right) + \Delta K\left(\frac{\partial F_L}{\partial K} + o(\Delta K)\right) +$$
$$+ \Delta H\left(\frac{\partial F_L}{\partial H} + o(\Delta H)\right) + \Delta t\left(\frac{\partial F_L}{\partial t} + o(\Delta t)\right),$$

где $\Delta L = (L - L_0)$, $\Delta K = (K - K_0)$, $\Delta H = (H - H_0)$.

Предположим, что частные производные непрерывны, а $o(\Delta L), o(\Delta K)$, $o(\Delta H)$ – малые величины первого порядка от изменения факторов производства. Изменение, которое происходит в факторах производства за малый промежуток времени, определим из равенства: $\overline{r} - \overline{r}_0 = \overline{v}\Delta t$.

Скалярно умножим обе части равенства на вектор $\overline{v}$ и из равенства найдем время изменения:

$$\Delta t = \frac{\Delta L v_L}{|\overline{v}|^2} + \frac{\Delta K v_K}{|\overline{v}|^2} + \frac{\Delta H v_H}{|\overline{v}|^2}.$$

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Полученное равенство подставим в компоненту вектора экономического показателя $F_L(\bar{r},t)$:

$$F_L(\bar{r},t)=F_L(\bar{r}_0,t_0)+\sum_p \Delta p\left(\frac{\partial F_L}{\partial p}+\frac{v_p}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}+o(\Delta p)\right)+o(\Delta t),$$

где p – один из факторов производства.

Предположим, что контур достаточно мал и скорости обновления факторов производства на нем постоянны. Проинтегрируем вдоль кривой С, а постоянные множители вынесем за знаки интегралов:

$$\oint_C F_L(\bar{r},t)dL=F_L(\bar{r}_0,t_0)\oint_c dL+\left(\frac{\partial F_L}{\partial L}+\frac{v_L}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right)\oint_c (L-L_0)\,dL+$$

$$+\left(\frac{\partial F_L}{\partial K}+\frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right)\oint_c (K-K_0)\,dL+$$

$$+\left(\frac{\partial F_L}{\partial H}+\frac{v_H}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right)\oint_c (H-H_0)\,dL+$$

$$+\oint_c \Big(K\big(o(\Delta K+\Delta t)\big)+L\big(o(\Delta L+\Delta t)\big)+H\big(o(\Delta H+\Delta t)\big)\Big)dL.$$

На основании формул, полученных [41, с. 166–167], имеем:

$$\oint_C dL=\oint_C LdL=0,\ \oint_C KdL=-S_H=-S\cos(n,H)$$

$$\text{и}\ \oint_C HdL=S_K=S\cos(n,K).$$

Если предположить, что наибольшее расстояние точек контура от точки M равно ρ, тогда величина S имеет порядок ρ^2. Соответственно:

$$\oint_c \Big(K\big(o(\Delta K)+o(\Delta t)\big)+L\big(o(\Delta L)+o(\Delta t)\big)+$$

$$+H\big(o(\Delta H)+o(\Delta t)\big)\Big)dL=\succ(\varepsilon(S))+\succ(\varepsilon(t)),$$

где $o(\varepsilon(S))$, $o(\varepsilon(t))$ – малые величины первого порядка.

Итак, переходя к пределу, получим:

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C F_L(\bar{r},t)dL}{S}=-\left(\frac{\partial F_L}{\partial K}+\frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right)\cos(n,H)+$$

$$+\left(\frac{\partial F_L}{\partial H}+\frac{v_H}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right)\cos(n,K).$$

Аналогично получим остальные компоненты, используя циклическую перестановку букв H, K и L:

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C F_H(\bar{r},t)dH}{S}=-\left(\frac{\partial F_H}{\partial L}+\frac{v_L}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_H}{\partial t}\right)\cos(n,K)+$$

$$+\left(\frac{\partial F_H}{\partial K}+\frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_H}{\partial t}\right)\cos(n,L)$$

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C F_K(\bar{r},t)dK}{S}=-\left(\frac{\partial F_K}{\partial H}+\frac{v_H}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_K}{\partial t}\right)\cos(n,L)+$$

$$+\left(\frac{\partial F_K}{\partial L}+\frac{v_L}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_K}{\partial t}\right)\cos(n,H).$$

Из определения ротора вектора экономического показателя имеем предел:

$$ROT(\bar{F})=\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \bar{F}(\bar{r},t)\cdot d\bar{r}}{S}=\lim$$

$$=\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \big(F_L(\bar{r},t)dL+F_K(\bar{r},t)dK+F_H(\bar{r},t)dH\big)}{S},$$

который можно переписать в виде:

$$ROT(\bar{F})=\left[\left(\frac{\partial F_K}{\partial L}+\frac{v_L}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_K}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial F_L}{\partial K}+\frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right)\right]\cos(n,H)+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial F_L}{\partial H}+\frac{v_H}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial F_H}{\partial L}+\frac{v_L}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_H}{\partial t}\right)\right]\cos(n,K)+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial F_H}{\partial K}+\frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_H}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial F_K}{\partial H}+\frac{v_H}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial F_K}{\partial t}\right)\right]\cos(n,L).$$

Это выражение позволяет вычислить циркуляцию вектора $\bar{F}(\bar{r},t)$ по любому достаточно малому контуру, окружающему точку $D(\bar{r}_0,t_0)$ и лежащему в плоскости, перпендикулярной к вектору нормали n. Вектор $\bar{F}(\bar{r},t)=\big(F_L(\bar{r},t),F_K(\bar{r},t),F_H(\bar{r},t)\big)$ имеет проекцию на любое направление n, которая равна:

$$F_n(\bar{r},t)=F_L(\bar{r},t)\cos(n,L)+F_K(\bar{r},t)\cos(n,K)+$$

$$+F_H(\bar{r},t)\cos(n,H).$$

Мы можем рассмотреть $ROT(\bar{F})$ в проекциях:

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

$$ROT_H(\overline{F}) = \left(\frac{\partial F_K}{\partial L} + \frac{v_L}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_K}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial F_L}{\partial K} + \frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right),$$

$$ROT_K(\overline{F}) = \left(\frac{\partial F_L}{\partial A} + \frac{v_A}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial F_H}{\partial L} + \frac{v_L}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_H}{\partial t}\right),$$

$$ROT_L(\overline{F}) = \left(\frac{\partial F_H}{\partial K} + \frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_H}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial F_K}{\partial H} + \frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_K}{\partial t}\right).$$

Полученный вектор является аналитическим представлением вихря экономического показателя $\overline{F}(\overline{r},t)$ в системе координат, образованной факторами производства. От классического определения динамический ротор отличается слагаемыми, учитывающими динамическое изменение экономического показателя $\overline{F}(\overline{r},t)$.

Как для всякого векторного поля экономического показателя, для вектора вихря можно ввести понятия вихревых линий развития, поверхностей и коридоров развития. Вихревой линией развития назовем линию, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением вектора вихря $ROT(\overline{v})$. Соответственно дифференциальные уравнения вихревых линий развития имеют вид:

$$\frac{dL}{ROT_L(\overline{v})} = \frac{dK}{ROT_K(\overline{v})} = \frac{dH}{ROT_H(\overline{v})}.$$

Вихревая поверхность: $f(L,K,A) = const$ состоит из вихревых линий развития. Ее уравнение имеет вид:

$$ROT_L(\overline{v})\frac{\partial f}{\partial L} + ROT_K(\overline{v})\frac{\partial f}{\partial K} + ROT_H(\overline{v})\frac{\partial f}{\partial H} = 0.$$

Вихревой коридор развития экономики образуется, если через точки замкнутой кривой С (не являющейся вихревой линией развития) провести вихревые линии. На боковой поверхности вихревого коридора развития экономики выполняется равенство: $ROT_n(\overline{v}) = 0$, где n – вектор нормали к боковой поверхности коридора.

Волновой характер развития экономики является общеизвестным фактом. Если рассмотреть развитие экономики в пространстве возобновляемых факторов производства и времени, то, скорее всего, развитие идет по спирали, которая имеет некоторую ось. Эта ось представляет собой вихревую линию развития. Вихревой коридор – это множество различных смещений вихревой линии в результате деятельности управляющих органов, конкуренции и влияния других экономических явлений.

Понятие вихревого коридора является частным случаем более общего понятия вихревой трубки, которое используется в векторном и тензорном анализе. Вихревая трубка – это некоторый объем, ограниченный поверхностью, состоящей из вихревых линий, проходящий через замкнутый контур [43, с. 170, 172]. Вихревые линии в трубке могут образовывать замкнутую поверхность (тор), опираться на стенку или свободную поверхность. В вихревом коридоре линии не могут образовывать тор и опираться на стенку, а вот опираться на свободную поверхность могут.

Будем считать, что векторный показатель $F(\overline{r},t)$ обладает свойством пропорциональности относительно скоростей факторов производства или просто свойством пропорциональности, если отношение скоростей развития факторов производства совпадает с отношением локальных скоростей компонент экономического показателя $\overline{F}(\overline{r},t)$ при заданных факторах производства, т. е. имеет место равенство:

$$\frac{v_K}{v_H} = \frac{\frac{\partial F_K}{\partial t}}{\frac{\partial F_H}{\partial t}}, \quad \frac{v_K}{v_L} = \frac{\frac{\partial F_K}{\partial t}}{\frac{\partial F_L}{\partial t}}, \quad \frac{v_L}{v_H} = \frac{\frac{\partial F_L}{\partial t}}{\frac{\partial F_H}{\partial t}}.$$

Свойство пропорциональности не является надуманной конструкцией и часто используется в векторном и тензорном анализе [43, с. 122].

Результаты исследования

Сформулируем и докажем два утверждения: о зависимости скорости изменения факторов производства от скорости инвестирования и о возникновении плоской волны в обновляемых факторах производства. Предлагается сделать некоторую модификацию одного из «стилизованных» фактов В. Истерли и Р. Левина. Будем предполагать не зависимость факторов производства друг от друга, а зависимость скорости изменения фактора от самого себя и других факторов.

Утверждение 1. Пусть каждая компонента скорости изменения факторов производства зависит от всех возобновляемых факторов. Тогда имеет место уравнение:

$$GRAD\left(\frac{|\overline{v}|^2}{2}\right) + 3\left(\overline{\varpi} \times \overline{v}\right) = \overline{j},$$

где $\overline{\varpi}$ – вектор угловой скорости обновления факторов производства, который показывает скорость угла

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

поворота вектора и позволяет представить вектор скорости в виде суммы поступательного и вихревого развития $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\varpi} \times \bar{r}$,

$$GRAD(\varphi) = \left(\frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial L},\ \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial K},\ \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial H} \right),$$

$\bar{\omega} \times \bar{r}$ – векторное произведение векторов.

Доказательство. Построим уравнение изменения скорости факторов производства на базе уравнения для валовых инвестиций в неоклассической модели роста:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v} = \bar{j} \qquad (1)$$

с учетом вихревой составляющей1 [43, с. 129]. Здесь $(\bar{v} \cdot \nabla)$ – скалярное произведение, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial L},\ \frac{\partial}{\partial K},\ \frac{\partial}{\partial H} \right)$, $\bar{j}$ – вектор скорости изменения инвестиций в факторы производства. Полная производная составляющей трудовых ресурсов скорости имеет вид:

$$\frac{dv_L}{dt} = \frac{\partial v_L}{\partial t} + \frac{\partial v_L}{\partial L} v_L + \frac{\partial v_L}{\partial K} v_K + \frac{\partial v_L}{\partial H} v_H = \frac{\partial v_L}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial L}(v_L^2 + v_K^2 + v_H^2) + \left(\frac{\partial v_L}{\partial H} - \frac{\partial v_H}{\partial L} \right) v_H - \left(\frac{\partial v_K}{\partial L} - \frac{\partial v_L}{\partial K} \right) v_K .$$

Используя представление динамического ротора, получим:

$$\frac{dv_L}{dt} = \frac{v_L^2}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial v_L}{\partial t} + \frac{v_L v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial v_H}{\partial t} + \frac{v_L v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial v_K}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial L} +$$

$$+ ROT_K(\bar{v}) v_H - ROT_H(\bar{v}) v_K =$$

$$= \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \cdot \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right) \frac{v_L}{|\bar{v}|} + \frac{1}{2} \frac{\partial |\bar{v}|^2}{\partial L} + \left(ROT(\bar{v}) \times \bar{v} \right)_L =$$

$$= \frac{v_L}{|\bar{v}|} \frac{\partial |\bar{v}|}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial |\bar{v}|^2}{\partial L} + \left(ROT(\bar{v}) \times \bar{v} \right)_L ,$$

где $\left(ROT(\bar{v}) \times \bar{v} \right)_L$ – L – составляющая векторного произведения.

Уравнение изменения скорости факторов производства (1) в векторном виде с учетом последнего равенства может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \frac{\partial |\bar{v}|}{\partial t} + grad\left(\frac{|\bar{v}|^2}{2} \right) + \left(ROT(\bar{v}) \times \bar{v} \right) = \bar{j} \qquad (2)$$

или используя динамический градиент в виде:

$$GRAD\left(\frac{|\bar{v}|^2}{2} \right) + \left(ROT(\bar{v}) \times \bar{v} \right) = \bar{j} ,$$

где

$$GRAD(\varphi) = \left(\frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial L},\ \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial K},\ \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(\bar{r},t)}{\partial H} \right),$$

где $\bar{j}$ – вектор скорости изменения инвестиций в факторы производства.

Во второе слагаемое последнего равенства подставим выражение $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\varpi} \times \bar{r}$ и с использованием вихревой составляющей получим:

$$GRAD\left(\frac{|\bar{v}|^2}{2} \right) + 3\left(\bar{\varpi} \times \bar{v} \right) = \bar{j} \cdot$$

Полученная система дифференциальных уравнений описывает поведение скорости факторов производства в зависимости от объемов финансирования и в предположении, что эта скорость нулевая. В этой системе учтено, что все факторы производства влияют на скорость изменения каждого из них. Следует отметить, что в реальной экономике не бывает непрерывного пропорционального финансирования факторов производства. Пропорции всегда нарушаются, что неизбежно ведет к возникновению вихря. Такое развитие диссипативно и нуждается в постоянном восстановлении инвестирования в заданных ранее пропорциях. Под диссипативностью развития экономики понимается процесс, в котором происходит частичная потеря инвестиций, в результате потерянные инвестиции не оказывают влияния на изменение объемов факторов производства. Случайные всплески вихря, по существу, не являются диссипативными.

---

[1] Кузнецов С. Б. Дифференциальное представление показателя стагнации //Актуальные проблемы экономики и права. 2011. № 1 (17). С. 191.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Рассмотрим плоскую волну, представленную в комплексном виде:

$$\bar{v} = \bar{a}e^{if},$$

где $\bar{a} = (a_L,\ a_K,\ a_H)$ – вектор амплитуды волны; $\bar{v} = (v_L,\ v_K,\ v_H)$ – скорость обновления факторов производства; i – мнимая единица; $f = \bar{k} \cdot \bar{r} - \theta t$; $\bar{k} = (k_L,\ k_K,\ k_H)$ – вектор волнового числа; θ – круговая частота; $\bar{r} = (L, K, H)$.

Утверждение 2. Предположим, что вектор скорости инвестирования в возобновляемые факторы производства обладает свойством пропорциональности относительно вектора скоростей факторов производства. Кроме того, поле инвестиций является потенциальным. Тогда решением уравнения:

$$\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\frac{\partial|\bar{v}|}{\partial t} + grad\left(\frac{|\bar{v}|^2}{2}\right) + \left(ROT(\bar{v}) \times \bar{v}\right) = \bar{j}$$

является плоская волна при условии параллельности любых двух из векторов $\bar{k}$, $\bar{\varpi}$, $\bar{a}$ или возможности выразить любой вектор через оставшиеся два.

Доказательство. Из представления динамического ротора через угловую скорость и линейную скорость развития факторов производства имеем:

$$ROT_H(\bar{v}) = \left(\frac{\partial v_K}{\partial L} + \frac{v_L}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial v_K}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial v_L}{\partial K} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial v_L}{\partial t}\right) =$$

$$= 2\varpi_H + \frac{v_L}{|\bar{v}|^2}\left(\varpi_H v_L - \varpi_L v_H\right) - \frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\left(\varpi_K v_H - \varpi_H v_K\right) =$$

$$= \left[2\bar{\varpi} + \frac{\bar{v} \times (\bar{\varpi} \times \bar{v})}{|\bar{v}|^2}\right]_H = 3\varpi_H - \frac{(\bar{\varpi} \cdot \bar{v})}{|\bar{v}|^2}v_H,$$

где $(\bar{\varpi} \times \bar{v})$ – векторное произведение; $(\bar{\varpi} \cdot \bar{v})$ – скалярное произведение векторов $\bar{\varpi}, \bar{v}$.

Аналогично можно получить выражения для других компонент.

В векторном виде динамический ротор скорости примет вид:

$$ROT(\bar{v}) = 2\bar{\varpi} + \frac{\bar{v} \times (\bar{\varpi} \times \bar{v})}{|\bar{v}|^2} = 3\bar{\varpi} - \frac{(\bar{\varpi} \cdot \bar{v})}{|\bar{v}|^2}\bar{v} =$$

$$= |\bar{\varpi}|\left(3\frac{\bar{\varpi}}{|\bar{\varpi}|} - \cos(\bar{\varpi}, \bar{v}).\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right).$$

Из потенциальности поля инвестиций следует, что: $\bar{I} = gradU$, и в этом случае наше уравнение можно записать в виде:

$$GRAD\left(\frac{|\bar{v}|^2}{2}\right) + 3\left(\bar{\varpi} \times \bar{v}\right) = \frac{d(gradU)}{dt}. \quad (3)$$

К обеим частям равенства (3) применим динамический ротор. Компонента правой части равенства (3), соответствующая, например, человеческому капиталу, после преобразования имеет вид:

$$ROT_H\left(grad\left(\frac{dU}{dt}\right)\right) = \frac{v_L}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial j_K}{\partial t} - \frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial j_L}{\partial t},$$

где $\frac{d\bar{I}}{dt} = (j_L(L,t),\ \ j_K(K,t),\ \ j_H(H,t))$, $\bar{I}$ – вектор валовых инвестиций.

Из условия пропорциональности получим, что $\bar{v} \times \frac{\partial \bar{j}}{\partial t} = 0$, или отношение скоростей развития факторов производства совпадает с отношением локальных ускорений объемов инвестирования при заданных факторах производства, т. е.:

$$\frac{v_K}{v_L} = \frac{\frac{\partial j_K}{\partial t}}{\frac{\partial j_L}{\partial t}}.$$

В результате получим нулевую правую часть (3) после применения операции динамический ротор.

Докажем, что

$$ROT\left(GRAD(\varphi(\bar{r}, t))\right) = \frac{\partial\varphi(\bar{r}, t)}{\partial t}ROT\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\right).$$

Действительно, рассмотрим L-компоненту динамического ротора:

$$ROT_L\left(GRAD(\varphi(\bar{r}, t))\right) = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial H} + \frac{v_H}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) +$$

$$+ \frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial H} + \frac{v_H}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial K} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \frac{v_H}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial K} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) =$$

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial K\partial H}+\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial K\partial t}+\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial H}+$$

$$+\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\right)+\frac{v_K v_H}{|\overline{v}|^4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-$$

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial K\partial H}-\frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial H\partial t}-\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial K}-$$

$$\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\right)-\frac{v_K v_H}{|\overline{v}|^4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\right)+\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\right)-\frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\right)\right)=\frac{\partial\varphi(\overline{r},t)}{\partial t}ROT_L\left(\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\right).$$

Проводя аналогичные рассуждения для других компонент ротора, получим требуемое равенство.

Левая часть на основании доказанных равенств принимает вид:

$$|\overline{v}|\frac{\partial|\overline{v}|}{\partial t}ROT\left(\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\right)+3ROT\left(\overline{\varpi}\times\overline{v}\right)=0.$$

Пусть имеются три вектора A, B, C. На основании свойств векторного произведения имеем:

$$C\times(A\times B)=(B\cdot C)A-B(C\cdot A)=A(C\cdot B)-(A\cdot C)B\,.$$

Полагая в приведенном равенстве $C=\nabla_t$, получим выражения:

$$\nabla_t\times(A\times B_c)=(B_c\cdot\nabla_t)A-B_c(\nabla_t\cdot A),$$

$$\nabla_t\times(A_c\times B)=A_c(\nabla_t\cdot B)-(A_c\cdot\nabla_t)B\,.$$

В этих выражениях индекс c указывает, что рассматриваемая величина постоянна. Складывая эти выражения и откидывая индекс c, получим формулу:

$$ROT(A\times B)=\nabla_t\times(A\times B)=(B\cdot\nabla_t)A-B(\nabla_t\cdot A)+$$

$$+A(\nabla_t\cdot B)-(A\cdot\nabla_t)B.$$

Рассмотрим частный случай полученного равенства с $A=\overline{\varpi}$ постоянным вектором и $B=\overline{v}$. Из последнего равенства имеем:

$$ROT(\overline{\varpi}\times\overline{v})=(\overline{v}\cdot\nabla_t)\overline{\varpi}-\overline{v}(\nabla_t\cdot\overline{\varpi})+$$

$$+\overline{\varpi}(\nabla_t\cdot\overline{v})-(\overline{\varpi}\cdot\nabla_t)\overline{v}\,.$$

Распишем каждое слагаемое последнего равенства:

$$(\overline{v}\cdot\nabla_t)\overline{\varpi}=\frac{\partial\overline{\varpi}}{\partial t}+v_L\frac{\partial\overline{\varpi}}{\partial L}+v_K\frac{\partial\overline{\varpi}}{\partial K}+v_H\frac{\partial\overline{\varpi}}{\partial H}=\frac{d\overline{\varpi}}{dt}\,.$$

Из определения динамической дивергенции [44, с. 48] получим:

$$(\nabla_t\cdot\overline{v})=DIV(\overline{v})\text{ и }(\nabla_t\cdot\overline{\varpi})=DIV(\overline{\varpi}),$$

где

$$DIV(\overline{F}(\overline{r},t)=\frac{v_L}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_L}{\partial t}+\frac{v_K}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_K}{\partial t}+\frac{v_H}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial F_H}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial F_L}{\partial L}+\frac{\partial F_K}{\partial K}+\frac{\partial F_H}{\partial H}.$$

Подставляя в исходное равенство слагаемые, заключаем, что:

$$ROT(\overline{\varpi}\times\overline{v})=\frac{d\overline{\varpi}}{dt}-\overline{v}DIV(\overline{\varpi})+\overline{\varpi}DIV(\overline{v})-(\overline{\varpi}\cdot\nabla_t)\overline{v}\,.$$

Принимая во внимание, что $\overline{\varpi}$ – постоянный вектор, имеем:

$$ROT(\overline{\varpi}\times\overline{v})=\overline{\varpi}DIV(\overline{v})-(\overline{\varpi}\cdot\nabla_t)\overline{v}\ ,$$

где

$$(\overline{\varpi}\cdot\nabla_t)\overline{v}=\frac{\overline{v}\cdot\overline{\varpi}}{|\overline{v}|^2}\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial L}\varpi_L+\frac{\partial\overline{v}}{\partial K}\varpi_K+\frac{\partial\overline{v}}{\partial H}\varpi_H\,.$$

В результате получим равенство:

$$|\overline{v}|\frac{\partial|\overline{v}|}{\partial t}ROT\left(\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\right)+3\overline{\varpi}DIV(\overline{v})-3(\overline{\varpi}\cdot\nabla_t)\overline{v}=0\,.$$

Для этого уравнения найдем решение в виде плоской волны: $\overline{v}=\overline{a}e^{if}$.

Подставляя уравнение плоской волны в слагаемые нашего уравнения, получим:

$$|\overline{v}|\frac{\partial|\overline{v}|}{\partial t}=-i\theta|\overline{v}|^2\,,\quad ROT\left(\frac{\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\right)=-i\frac{\overline{v}\times\overline{k}}{|\overline{v}|^2}\,,$$

$$\overline{\varpi}DIV(\overline{v})=i\overline{\varpi}\left[-\theta+(\overline{k}\cdot\overline{v})\right],$$

$$(\overline{\varpi}\cdot\nabla_t)\overline{v}=i\overline{v}\left[(\overline{k}\cdot\overline{\varpi})-\frac{\theta}{|\overline{v}|^2}(\overline{v}\cdot\overline{\varpi})\right].$$

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Окончательно уравнение (3) примет вид:

$$-\theta\left(\bar{v}\times\bar{k}\right)+3i\left[\theta\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\left(\bar{\varpi}\cdot\bar{v}\right)-\theta\bar{\varpi}+\bar{k}\times\left(\bar{\varpi}\times\bar{v}\right)\right]=0\,.$$

Скалярно умножим обе части равенства на ненулевой вектор $\bar{v}=(v_L,\ v_K,\ v_H)$ и, учитывая равенство:

$$\bar{v}\cdot\left(\bar{v}\times\bar{k}\right)=\bar{k}\cdot(\bar{v}\times\bar{v})=0\,,$$

получим выражение:

$$\bar{v}\cdot\left(\bar{k}\times\left(\bar{\varpi}\times\bar{v}\right)\right)=0.$$

Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{k}\times\left(\bar{\varpi}\times\bar{a}\right)\right)=0.$$

Это равенство выполняется в одном из двух случаев.

Первый случай. Объем фигуры, построенной на векторах $\bar{k},\ \bar{\varpi},\ \bar{a}$, нулевой. Нулевой объем фигуры достигается, когда из этих векторов два любых параллельны или все три вектора лежат в одной плоскости, т. е. любой из векторов $\bar{k},\ \bar{\varpi},\ \bar{a}$ можно выразить через другие два. Из полученного равенства можно заключить, что, для того чтобы плоская волна $\bar{v}=\bar{a}e^{if}$ была решением уравнения (3), достаточно параллельности любых двух или возможности выразить любой вектор через оставшиеся два.

Второй случай. Последнее равенство с учетом вида плоской волны $\bar{v}=\bar{a}e^{if}$ можно переписать следующим образом:

$$\left(\bar{k}\cdot\bar{\varpi}\right)=\left(\bar{\varpi}\cdot\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}\right)\left(\bar{k}\cdot\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}\right).$$

Полученная запись показывает связь векторов $\bar{k},\ \bar{\varpi},\ \bar{a}$.

Замечание 1. В случае ортогональности векторов любых двух из векторов $\bar{k},\ \bar{\varpi},\ \bar{a}$ условие утверждения выполняется и плоская волна $\bar{v}=\bar{a}e^{if}$ является решением уравнения (2).

Замечание 2. Если вектора $\bar{k},\ \bar{\varpi},\ \bar{a}$ двухмерные, например зависящие от объема трудовых ресурсов и физического капитала, то второй случай сводится к выполнению условия:

$$\frac{k_K}{k_L}=-\frac{\varpi_K}{\varpi_L}\,.$$

Таким образом, найдены условия существования решения уравнения (2) в виде плоской волны.

Выводы

Потенциальность поля инвестиций не является серьезным ограничением в полученном утверждении, так как оно легко удовлетворяется, например, если взять в качестве $U=\frac{1}{2}\frac{\partial|\bar{r}|^2}{\partial t}$.

Условие пропорциональности требует, чтобы вектор потока инвестиций и вектор ускорения инвестиций были параллельны. Это условие удовлетворяется, если инвестирование идет непрерывно, с соблюдением некоторых пропорций при финансировании факторов производства. Математически это можно выразить следующим образом:

$$\frac{I_K}{I_L}=\frac{\frac{d^2I_K}{dt^2}}{\frac{d^2I_L}{dt^2}}\ \text{ и }\ \frac{I_K}{I_H}=\frac{\frac{d^2I_K}{dt^2}}{\frac{d^2I_H}{dt^2}}\,.$$

Эти равенства позволяют сделать приблизительное вычисление объема инвестиций на следующий год. Пусть I_p^n – объем инвестиций, вложенный в p-фактор в n-году, тогда объем инвестиций в $n+1$ - году должен удовлетворять пропорциям:

$$\frac{I_K^{n+1}-2I_K^n+I_K^{n-1}}{I_L^{n+1}-2I_L^n+I_L^{n-1}}=\frac{I_K^n}{I_L^n},\ \frac{I_K^{n+1}-2I_K^n+I_K^{n-1}}{I_H^{n+1}-2I_H^n+I_H^{n-1}}=\frac{I_K^n}{I_H^n}\,.$$

На основании доказанного утверждения 2 можно заключить, что цикличность является естественным развитием экономики. При соблюдении описанных выше требований на инвестирование возможно прогнозирование параметров очередных кризисов с использованием уравнения плоской волны (3). При нарушении этих параметров прогнозы некорректны и поведение кризиса не поддается моделированию.

Главной проблемой для численного моделирования плоской волны в экономических приложениях является задача измерения человеческого капитала, физического капитала и трудовых ресурсов в одних и тех же единицах.

Эта работа – первый шаг к построению модели с учетом сопротивления экономической среды. Описанная модель позволяет только качественно делать прогноз в стабильно развивающейся экономике. Сейчас на ее базе создается новая модель. Получается уравнение типа Навье – Стокса, которое не имеет

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

единственного решения, их множество, что и соответствует процессам в реальной экономике.

Список литературы

1. Harrod R. F. (1939). An Essay in Dynamic Theory // The Economic Journal. 1939. Vol. 49. No. 193. Pp. 14–33.

2. Domar E. Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment // Econometrica. 1946. Vol. 14. No. 2. Pp. 137–147.

3. Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. No. 1. Pp. 65–94.

4. Kaldor N. Characteristics of economic development, in Essays on Economic Stability and Growth. London: Duckworth, 1980.

5. Barro R. Economic Growth in a Cross Section of Countries // Quarterly Journal of Economics. 1991. Vol. 106. No. 2. Pp. 407–443.

6. Barro R. Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth // Journal of Political Economy. 1990. Vol. 98. No. 5. Pp. 103–117.

7. Rivera-Batiz L. A., Romer P. M. Economic Integration and Endogenous Growth // The Quarterly Journal of Economics. 1991. Vol. 106. No. 2. Pp. 531–555.

8. Levine W., Easterly R. It`s Not Factor Accumulation: Stylized Facts and Growth Models // The world bank economic review. 2001. Vol. 15. No. 2. Pp. 177–219.

9. Jovanovic B., Lach S. Product Innovation and the Busi ness Cycle // International Economic Review, Department of Economics, University of Pennsylvania and Osaka University Institute of Social and Economic Research Association. 1997. Vol. 38. No. 1. Pp. 234–247.

10. Шараев Ю. В. Теория экономического роста. М.: ГУ ВШЭ, 2006. 254 с.

11. Romer P. M. Increasing Returns and Long-Run Growth // The Journal of Political Economy. 1986. Vol. 94. No. 5. Pp. 1002–1037.

12. Aghion P., Howitt P. Endogenous Growth Theory. MA: MIT Press, 1998. 389 p.

13. Aghion P., Bloom N., Blundell R., Griffith R., Howitt P. Competition and Innovation: An Inverted-U Relationship // Quarterly Journal of Economics. 2005. Vol. 120. Pp. 701–728.

14. Gancia G., Zilibotti F. Horizontal Innovation in the Theory of Growth and Development, in Handbook of Economic Growth (by P. Aghion and S. N. Durlauf, eds.), 2005. Vol. 1A, Chapter 3. Pp. 111–170, Elsevier, Amsterdam.

15. Grossman G., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge, MA: MIT Press, 1991. 359 p.

16. Lucas R. On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics 1988. Vol. 22. No. 1. Pp. 3–42.

17. Mankiw N. E., Romer D., Weil D. N. A contribution to the empirics of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1992. Vol. 107. No. 2. Pp. 407–437.

18. Fischer M. M. A Spatial Mankiw-Romer-Weil Model: Theory and Evidence // Annals of Regional Science. 2011. Vol. 47. Pp. 419–436.

19. Castillo L., Salem D. and Guasch, J. Innovative and Absorptive Capacity of International Knowledge: An Empirical Analysis of Productivity Sources in Latin American Countries. The World Bank Policy Research Working Paper 5931, 2012. Pp. 1–23.

20. Grossman G. M., Helpman E., Oberfield E., Sampson T. Balanced Growth Despite Uzawa. NBER Working Paper No. 21861 Issued in January 2016. URL: http://www.nber.org/people/ezra_oberfield (дата обращения: 19.07.16).

21. Ребело S., King R. Public Policy and Economic Growth: Developing Neoclassical Implications // Journal of Political Economy. 1990. Vol. 98. Pp. 126–150.

22. Barro R. Government Spending in Simple Model of Endogenous Growth // Journal of Political Economy. 1990. Vol. 98. No. 5. Pp. S71– S102.

23. Barro R., Sala-i-Martin X. Economic Growth. N. Y.: McGraw-Hill, 1995. Ch. 4. Pp. 140–170.

24. Basu S., Weil D. Appropriate Technology and Growth // The Quarterly Journal of Economics. Oxford University Press. 1998. Vol. 113. No. 4. Pp. 1025–1054.

25. Jones Ch. I. R&D-Based Models of Economic Growth // Journal of Political Economy. 1995. Vol. 103. No. 4. Pp. 759–784.

26. Minniti A., Parello C. P. Trade Integration and Regional Disparity in a Model of Scale-Invariant Growth // Regional Science and Urban Economics. 2011. Vol. 41. No. 1. Pp. 20–31.

27. Kremer M. Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990 // Quarterly Journal of Economics. 1993. Vol. 108. No. 4. Pp. 681–716.

28. Benabou R. Inequality and growth // NBER Macroeconomics Annual. 1996. Vol. 11. Pp. 11–92.

29. Alesina A., Rodrik D. Distributive politics and economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1994. Vol. 109. Pp. 465–490.

30. Ayla Ogus Binatli. Growth and Income Inequality: A Comparative Analysis // Economics Research International 2012. Vol. 12 (2012), Article ID 569890, 7 p.

31. Rooth D. O., Stenberg A. The Shape of the Income Distribution and Economic Growth – Evidence from Swedish Labor Market Regions. Scottish Journal of Political Economy. 2012. Vol. 59. No. 2. Pp. 196–223.

32. Castells-Quintana D., Royuela V. Agglomeration, inequality and economic growth. The Annals of Regional Science. 2014. Vol. 52. No. 2. Pp. 343–366.

33. Dorosh P., Thurlow J. Agglomeration, Growth and Regional Equity: An Analysis o f Agriculture versus Urban-led Development in Uganda // Journal o f African Economies. 2012. Vol. 21. Iss. 1. Pp. 94–123.

34. Кондратьев Н. Д. Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. М.: Экономика, 2002. 768 с.

35. Händeler E. Die Geschichte der Zukunft. – Brendow, Moers, 2003. 464 p.

36. Händeler E. Kondratieffs Welt. Brendow, Moers, 2005. 127 p.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

37. Schulmeister S. Mitten in der großen Krise: ein New Deal für Europa. Picus, Wien, 2010. 160 p.

38. Daniel S. The waves of the technological innovations of the modern age and the present crisis as the end of the wave of the informational technological revolution // Studia politica Slovaca. 2009. Vol. 1. Pp. 32–47.

39. Korotayev A., Tsirel S. A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis // Structure and Dynamics. 2010. Vol. 4 (1). Pp. 3–57.

40. Шумпетер Й. А. Теория экономического развития. М.: Директмедиа Паблишинг, 2008. 400 с.

41. Elliott R. N. The Wave Principle. Alanpuri Trading, Los Angeles, 2013. Softcover, Reprint.

42. Кузнецов С. Б. Моделирование стагнации экономических показателей // Research Journal of International Studies. 2012. Ч. 2. № 5 (5). С. 38–41.

43. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427 с.

44. Кузнецов С. Б. Индикатор поведения национальной экономики // Экономика и управление. 2016. № 4 (126). С. 48–52.

Дата поступления 21.06.2016
Дата принятия в печать 01.08.2016
Дата онлайн-размещения 20.09.2016

Информация об авторе

Кузнецов Сергей Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский институт управления Российской академии народного хозяйства и государственной службы
Адрес: 630102, г. Новосибирск, ул. Нижегородская, 6, тел.: +7 383-2101-323
E-mail: sbk@ngs.ru
ORCID: http://orcid.org/ 0000-0002-7881-5336
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/L-6105-2016

S. B. KUZNETSOV[1]

[1]Siberian Institute of Management of the Russian Academy of Economy and State Service, Novosibirsk, Russia

MODELLING OF THE CYCLES OCCURRENCE IN ECONOMY

Objective: to prove the existence and conditions of appearance of a plane wave during the investing into the renewable factors of production.
Methods: abstraction, economic-mathematical modeling.
Results: the cyclical nature of the economy is studied and proved in many studies, but most of them are based on the empirical data without analytical proof. The author of the article proves the existence of plane waves, which occur as a result of updates of the renewable factors of production. The identified factors include physical capital, the amount of labor resources and human capital.
Basing on the vector analysis, it is proved that the plane wave arises in case of potential investments and fulfillment of the following condition: the speed of investment in renewable factors of production must be proportional to the velocities of the factors of production. It was determined that in case of changes in the rate of funding of any of the factors, the development of other factors of production will change, i.e., a vortex will appear. The formulated system of equations of the changing velocity of production factors in a vector form was solved by a plane wave under the condition of parallelism of any two vectors. On the basis of the proven allegations, it was concluded that the cyclic character is a natural way of the economy development.
Scientific novelty: on the basis of vector analysis, the existence of a plane wave in the production factors development is proved.
Practical significance: knowing the dynamics of the plane wave, its length and amplitude, we can determine the moments of time tightening and loosening of taxation and fiscal policy to regulate investment in the factors of production.
Keywords: Mathematical and instrumental methods in economics; Dynamic rotor; Factors of production; Plane wave; Investments

References

1. Harrod, R. F. An Essay in Dynamic Theory, *The Economic Journal,* 1939, vol. 49, No. 193, pp. 14–33.
2. Domar, E. Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment, *Econometrica*, 1946, vol. 14, No. 2, pp. 137–147.
3. Solow, R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 1956, vol. 70, No. 1, pp. 65–94.
4. Kaldor, N. *Characteristics of economic development, in Essays on Economic Stability and Growth*, London: Duckworth, 1980.
5. Barro, R. Economic Growth in a Cross Section of Countries, *Quarterly Journal of Economics*, 1991, vol. 106, No. 2, pp. 407–443.
6. Barro, R. Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth, *Journal of Political Economy*, 1990, vol. 98, No. 5, pp. 103–117.
7. Rivera-Batiz, L. A., Romer, P. M. Economic Integration and Endogenous Growth, *The Quarterly Journal of Economics*, 1991, vol. 106, No. 2, pp. 531–555.
8. Levine, W., Easterly, R. It`s Not Factor Accumulation: Stylized Facts and Growth Models, *The world bank economic review*, 2001, vol. 15, No. 2, pp. 177–219.
9. Jovanovic, B., Lach, S. Product Innovation and the Business Cycle, *International Economic Review, Department of Economics, University of Pennsylvania and Osaka University Institute of Social and Economic Research Association*, 1997, vol. 38, No. 1, pp. 234–247.
10. Sharaev, Yu. V. *Theory of economic growth*, Moscow: GU VShE, 2006, 254 p. (in Russ.).
11. Romer, P. M. Increasing Returns and Long-Run Growth, *The Journal of Political Economy*, 1986, vol. 94, No. 5, pp. 1002–1037.
12. Aghion, P., Howitt, P. *Endogenous Growth Theory,* MA: MIT Press, 1998, 389 p.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

13. Aghion, P., Bloom, N., Blundell, R., Griffith, R., Howitt, P. Competition and Innovation: An Inverted-U Relationship, *Quarterly Journal of Economics*, 2005, vol. 120, pp. 701–728.
14. Gancia, G., Zilibotti, F. Horizontal Innovation in the Theory of Growth and Development, *Handbook of Economic Growth* (by P. Aghion and S. N. Durlauf, eds.), 2005, vol. 1A, chapter 3, pp. 111–170.
15. Grossman, G., Helpman, E. *Innovation and Growth in the Global Economy*, Cambridge, MA: MIT Press, 1991, 359 p.
16. Lucas, R. On the Mechanics of Economic Development, *Journal of Monetary Economics*, 1988, vol. 22, No. 1, pp. 3–42.
17. Mankiw, N. E., Romer, D., Weil, D. N. A contribution to the empirics of economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, 1992, vol. 107, No. 2, pp. 407–437.
18. Fischer, M. M. A Spatial Mankiw-Romer-Weil Model: Theory and Evidence, *Annals of Regional Science*, 2011, vol. 47, pp. 419–436.
19. Castillo, L., Salem, D. and Guasch, J. Innovative and Absorptive Capacity of International Knowledge: An Empirical Analysis of Productivity Sources in Latin American Countries, *The World Bank Policy Research Working Paper*, 5931, 2012, pp. 1–23.
20. Grossman, G. M., Helpman, E., Oberfield, E., Sampson, T. Balanced Growth Despite Uzawa, *NBER Working Paper*, No. 21861, issued in January 2016, available at: http://www.nber.org/people/ezra_oberfield (access date: 19.07.16).
21. Ребело, S., King, R. Public Policy and Economic Growth: Developing Neoclassical Implications, *Journal of Political Economy*, 1990, vol. 98, pp. 126–150.
22. Barro, R. Government Spending in Simple Model of Endogenous Growth, *Journal of Political Economy,* 1990, vol. 98, No. 5, pp. S71–S102.
23. Barro, R., Sala-i-Martin, X. *Economic Growth*. N. Y.: McGraw-Hill, 1995, ch. 4, pp. 140–170.
24. Basu, S., Weil, D. Appropriate Technology and Growth, *The Quarterly Journal of Economics,* Oxford University Press, 1998, vol. 113, No. 4, pp. 1025–1054.
25. Jones, Ch. I. R&D-Based Models of Economic Growth, *Journal of Political Economy*, 1995, vol. 103, No. 4, pp. 759–784.
26. Minniti, A., Parello, C. P. Trade Integration and Regional Disparity in a Model of Scale-Invariant Growth, *Regional Science and Urban Economics,* 2011, vol. 41, No. 1, pp. 20–31.
27. Kremer, M. Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990, *Quarterly Journal of Economics*, 1993, vol. 108, No. 4, pp. 681–716.
28. Benabou, R. Inequality and growth, *NBER Macroeconomics Annual*, 1996, vol. 11, pp. 11–92.
29. Alesina, A., Rodrik, D. Distributive politics and economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, 1994, vol. 109, pp. 465–490.
30. Ayla Ogus Binatli. Growth and Income Inequality: A Comparative Analysis, *Economics Research International*, 2012, vol. 12 (2012), Article ID 569890, 7 p.
31. Rooth, D. O., Stenberg, A. The Shape of the Income Distribution and Economic Growth – Evidence from Swedish Labor Market Regions, *Scottish Journal of Political Economy*, 2012, vol. 59, No. 2, pp. 196–223.
32. Castells-Quintana, D., Royuela, V. Agglomeration, inequality and economic growth, *The Annals of Regional Science*, 2014, vol. 52, No. 2, pp. 343–366.
33. Dorosh, P., Thurlow, J. Agglomeration, Growth and Regional Equity: An Analysis o f Agriculture versus Urban-led Development in Uganda, *Journal of African Economies*. 2012, Vol. 21, iss. 1, pp. 94–123.
34. Kondrat'ev, N. D. *Large cycles of conjuncture and theory of prediction*, Moscow: Ekonomika, 2002, 768 pp. (in Russ.).
35. Händeler, E. *Die Geschichte der Zukunft*. – Brendow, Moers, 2003. 464 p.
36. Händeler, E. Kondratieffs Welt. Brendow, Moers, 2005, 127 p.
37. Schulmeister, S. *Mitten in der großen Krise: ein New Deal für Europa*. Picus, Wien, 2010, 160 p.
38. Daniel, S. The waves of the technological innovations of the modern age and the present crisis as the end of the wave of the informational technological revolution, *Studia politica Slovaca*, 2009, vol. 1, pp. 32–47.
39. Korotayev, A., Tsirel, S. A Spectral Analysis of World GDP Dynamics: Kondratieff Waves, Kuznets Swings, Juglar and Kitchin Cycles in Global Economic Development, and the 2008–2009 Economic Crisis, *Structure and Dynamics*, 2010, vol. 4 (1), pp. 3–57.
40. Shumpeter, I. A. *Theory of economic development*, Moscow: Direktmedia Pablishing, 2008, 400 p. (in Russ.).
41. Elliott, R. N. *The Wave Principle. Alanpuri Trading*, Los Angeles, 2013.
42. Kuznetsov, S. B. Modeling the stagnation of economic indicators, *Research Journal of International Studies*, 2012, Part 2, No. 5 (5), pp. 38–41 (in Russ.).
43. Kochin, N. E. *Vector calculation and the basics of tensor analysis*, Moscow: Nauka, 1965, 427 p. (in Russ.).
44. Kuznetsov, S. B. Indicator of the national economy trends, *Ekonomika i upravlenie*, 2016, No. 4 (126), pp. 48–52 (in Russ.).

Received 21.06.2016
Accepted 01.08.2016
Available online 20.09.2016

Information about the author

Sergey B. Kuznetsov, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Siberian Institute of Management of the Russian Academy of Economy and State Service
Address: 6 Nizhegorodskaya Str., 630102, Novosibirsk, tel.: +7 383-2101-323
E-mail: sbk@ngs.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7881-5336
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/L-6105-2016

For citation: Kuznetsov S. B. Modeling the appearance of cycles in economy, *Actual Problems of Economics and Law*, 2016, vol. 10, No. 3, pp. 69–82. DOI: http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.10.2016.3.69-82