

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.4

С.Б. КУЗНЕЦОВ,

*кандидат физико-математических наук, доцент**Сибирская академия государственной службы, г. Новосибирск*

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ СТАГНАЦИИ

*Предложен показатель стагнации, позволяющий определять начальные проявления стагнации экономики. Проведен анализ работы показателя на статистических данных ряда развитых стран. Определена скорость инвестирования в экономику с целью предотвращения стагнации.*

Рассмотрим экономические показатели  $\bar{F}(\bar{r}, t) = (F_L(\bar{r}, t), F_K(\bar{r}, t), F_H(\bar{r}, t))$  и  $\varphi(\bar{r}, t)$ , которые являются функцией времени  $t$ , трудовых ресурсов  $L$ , физического и человеческого капитала  $K$  и  $H$ , то есть зависят от вектора  $\bar{r} = (L, K, H)$ .

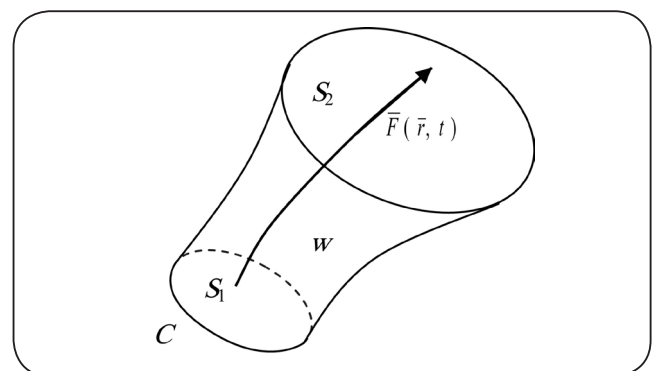
Будем анализировать некоторый элементарный объем факторов производства  $w$ . Выберем в пространстве факторов производства  $\Omega$  некоторую точку с координатами  $\bar{r} = (L, K, H)$ . Величина  $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}(\bar{r}, t)$  представляет собой скорость обновления факторов производства. Построим семейство линий, касательные к которым в каждой точке пространства  $\Omega$  будут совпадать в данный момент времени с направлением  $\bar{v}(\bar{r}, t)$  в этой точке, то есть определим пространство состояний экономики. Эти линии для поля скоростей являются линиями развития факторов [1].

Выберем в пространстве  $\Omega$  замкнутый контур  $C$ , в котором будем брать начальные условия для экономических объектов и построим линию развития факторов производства для этих экономических объектов (рис. 1).

Получим некоторый коридор от поверхности  $S_1$  до  $S_2$ , который назовем коридором развития экономики. Очевидно, коридор развития имеет то

свойство, что через его боковую границу линии развития не проходят [1].

*Утверждение 1.* Для скалярной функции  $\varphi(\bar{r}, t)$ , описывающей поведение некоторого экономического показателя, выделим в области развития ограниченный изменяющийся во времени объем факторов производства  $w$ . Предположим, что функция  $\varphi(\bar{r}, t)$  дифференцируема в выделенном объеме и на его границах. Будем считать, что объем  $w$  возникает из объема  $w_0 = w(t_0)$ , где  $t_0$  – начальный момент времени, путем непрерывных изменений элементов  $w_0$  вдоль линий, определяемых вектором скорости обновления факторов производства  $\bar{v}$ . Исходя из этого, имеет место тождество:



**Рис. 1. Коридор развития экономики  
в пространстве факторов производства**

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_w \varphi(\bar{r}, t) dV = \int_w \left[ \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial t} + \text{DIV}(\varphi \bar{v}) \right] dV, \quad (1)$$

где  $\text{DIV}(\bar{F}) = \text{div}(\bar{F}) + \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}$ .

*Доказательство.* Вычислим производную по подвижному объему в нашем пространстве:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_w \varphi(\bar{r}, t) dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_w \varphi(\bar{r}, t + \Delta t) dV - \int_{w_0} \varphi(\bar{r}, t) dV}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_w [\varphi(\bar{r}, t + \Delta t) - \varphi(\bar{r}, t)] dV + \int_{w-w_0} \varphi(\bar{r}, t) dV}{\Delta t} = \\ &= \int_w \frac{\partial \varphi(\bar{r}, t)}{\partial t} dV + \int_\Gamma \varphi(\bar{r}, t) \bar{v} \cdot d\bar{S}. \end{aligned}$$

Объем  $w - w_0$  всегда можно разбить на бесконечно малые объемы и для каждого написать полученное равенство. Если предположить,

что объемы так малы, что в них  $|\bar{v}| = \text{const}$ , то  $dV = \bar{v} \cdot d\bar{S} \Delta t$ .

Просуммировав по всем объемам и взяв предел при числе разбиений, стремящихся к бесконечности, с объемами, стремящимися к нулю и при  $\Delta t \rightarrow 0$ , поверхность  $\Gamma$  и поверхность  $w - w_0$  начинают совпадать, а функция  $\varphi(\bar{r}, t + \Delta t) \rightarrow \varphi(\bar{r}, t)$ .

Применив к последнему равенству формулу [1]:

$$\int_\Gamma \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_w \left( \frac{\partial F_L}{\partial L} + \frac{\partial F_K}{\partial K} + \frac{\partial F_H}{\partial H} + \frac{v_L}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_L}{\partial t} + \frac{v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_K}{\partial t} + \frac{v_H}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial F_H}{\partial t} \right) dV$$

с  $\bar{F}(\bar{r}, t) = \varphi(\bar{r}, t) \bar{v}$ , получим равенство (1).

Полученное тождество является следствием утверждения 1 [1] и своеобразным обобщением известной формулы векторного анализа [2].

Рассмотрим в качестве функции  $\varphi(r, t) = q(r, t) = \frac{dY}{dW}$  – предельную производительность экономики [3]. Пусть имеем дело с постоянным объемом валового продукта  $Y(r, t) = \text{const}$ , то есть наблюдается стагнация в экономике, тогда равенство (1) принимает вид:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \int_w \left[ \frac{\partial q(\bar{r}, t)}{\partial t} + \text{DIV}(q \bar{v}) \right] dV = 0. \quad (2)$$

Преобразуем произведение под знаком дивергенции:

$$\text{DIV}(q \bar{v}(\bar{r}, t)) = \frac{\partial q}{\partial t} + q \text{DIV}(\bar{v}) + (\bar{v} \cdot \text{grad} q) = \frac{d q}{d t} + q \text{DIV}(\bar{v}).$$

Равенство (2) имеет место для любого объема факторов производства, и поэтому на основании последнего тождества получим:

$$2 \frac{d q}{d t} + q \text{DIV}(\bar{v}) - (\bar{v} \cdot \text{grad} q) = 0. \quad (3)$$

Уравнение показывает поведение предельной производительности экономики в зависимости от скорости обновления факторов производства при условии, что в экономике наблюдается стагнация, но факторы производства могут изменяться.

Введем понятие показателя стагнации экономики:

$$Z = \frac{2}{q} \frac{d q}{d t} + \text{DIV}(\bar{v}) - \left( \bar{v} \cdot \frac{\text{grad} q}{q} \right). \quad (4)$$

Показатель рассчитывается для некоторого временного интервала. Приближение к нулю показателя указывает на вступление экономики в процесс стагнации.

Проявление кризисов не является хаотическим процессом. В силу целостности экономики экономические системы долго «помнят» произошедшие события и «чувствуют» их на больших расстояниях от места, где произошел экономический кризис. Математически это отражается степенным убыванием временных и пространственных корреляций, которые для некритических экономических систем обычно убывают экспоненциально [4].

В качестве примера можно рассмотреть кучу песка [5]. Состояние этой кучи определяется локальным наклоном поверхности. Крутые участки более склонны к участию в обвалах, а пологие – менее. Для возникновения большого обвала необходим некоторый избыток песка. Излишки песка не могут сосредоточиться в одном месте, не нарушив устойчивости. Причем потеря устойчивости произойдет за долго до возникновения большой лавины. Следовательно, значительная часть кучи должна иметь большой наклон. Не-

обходимое количество песка может оказаться на пологих участках в виде мелких обвалов, среди которых могут быть и значительные.

Таким образом, крупное событие должно иметь предвестников в виде предшествующих событий меньшего размера. Этот вывод справедлив и для экономических систем.

Рассмотрим известное уравнение для валовых инвестиций  $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{I}$ , где  $\bar{I} = (I_K, I_L, I_H)$  – объем чистых инвестиций в физический капитал, трудовые ресурсы и человеческий капитал в течение наблюдаемого срока. Дифференцируя обе части уравнения получим:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{I}}{dt} = \bar{j}, \quad (5)$$

где  $\bar{j}$  – скорость изменения чистых инвестиций.

*Утверждение 2.* Для вывода экономики из состояния стагнации необходимо, чтобы скорость инвестирования в факторы производства удовлетворяла неравенству

$$\frac{dI_p}{dt} > 2 \frac{v_p}{q} \frac{\partial q}{\partial t} + v_p \bar{v} \cdot \frac{\text{grad}q}{q} + DIV(v_p \bar{v}), \quad (6)$$

где  $p$  – один из факторов производства,  $DIV(\bar{F}) = \text{div}(\bar{F}) + \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2} \cdot \frac{\partial \bar{F}}{\partial t}$ ,  $q = \frac{dY}{dV}$ .

*Доказательство.* Выпишем уравнение (5) для фактора производства  $p$ :

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{\partial v_p}{\partial t} + v_L \frac{\partial v_p}{\partial L} + v_K \frac{\partial v_p}{\partial K} + v_A \frac{\partial v_p}{\partial A} = j_p.$$

В равенстве (2) объем интегрирования произвольный, поэтому подинтегральное выражение нулевое.

Рассмотрим равенство:

$$\frac{\partial(q v_p)}{\partial t} = q \frac{\partial v_p}{\partial t} + v_p \frac{\partial q}{\partial t},$$

в которое подставим подинтегральное выражение (2) и последнее равенство:

$$\frac{\partial(q v_p)}{\partial t} = q \left( j_p - v_L \frac{\partial v_p}{\partial L} - v_K \frac{\partial v_p}{\partial K} - v_A \frac{\partial v_p}{\partial A} \right) - v_p DIV(q \bar{v}).$$

Раскрывая оператор динамической дивергенции, получим для  $p=L$

$$\frac{\partial(q v_L)}{\partial t} = q j_L - \frac{\partial(q v_L^2)}{\partial L} - \frac{\partial(q v_L v_K)}{\partial K} - \frac{\partial(q v_L v_A)}{\partial A} - \frac{v_L^2}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(q v_L)}{\partial t} - \frac{v_L v_K}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(q v_K)}{\partial t} - \frac{v_L v_A}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(q v_A)}{\partial t}.$$

Принимая во внимание равенство:

$$\frac{\partial(q v_L)}{\partial t} = \frac{v_L^2}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(q v_L)}{\partial t} + \frac{v_K^2}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(q v_L)}{\partial t} + \frac{v_A^2}{|\bar{v}|^2} \frac{\partial(q v_L)}{\partial t},$$

окончательно получим:

$$v_L \frac{\partial q}{\partial t} + DIV(q v_L \bar{v}) = q j_L.$$

Подобные равенства получим для остальных факторов производства.

У полученной системы существует альтернативная запись:

$$2 \frac{v_p}{q} \frac{\partial q}{\partial t} + v_p \bar{v} \cdot \frac{\text{grad}q}{q} + DIV(v_p \bar{v}) = j_p, \quad (7)$$

где  $p$  – один из факторов производства. Эти системы назовем системами стагнации экономики. Из системы (7) можно определить скорость инвестиций, которую необходимо достичь при вложении в факторы производства для выхода экономики из состояния стагнации.

Очевидно, что чем выше скорость изменения фактора производства и чем больше предельная производительность экономики, тем выше должна быть скорость инвестиций, вкладываемых в этот фактор, для оживления экономики. Неравенство (6) показывает, что для борьбы со стагнацией в экономике важны не столько объемы инвестирования сколько скорость реакции на потребности в инвестировании.

Полученный вывод подтверждается недавними проблемами возникшими, например, в автомобилестроении во всем мире. Дополнительное финансирование со стороны государства, которое требовалось в отрасль, систематически запаздывало. Такой подход не решал проблемы, а только давал отсрочку, и это усугубляло положение автомобилестроителей.

Неравенство (6) совместно с индексом (4) дает инструмент для определения скорости инвестирования экономики, находящийся в условиях стагнации.

Были проведены расчеты по статистическим данным Франции, Японии, Германии и США в период с 1983 по 2009 гг. Данные вместе с прогнозом на 2010 г. взяты из официальной статистики и приведены к ценам 1983 г. [6]. Для получения наглядности изображения и сравнения прироста ВВП и показателя стагнации капитал, трудовые ресурсы и ВВП нормировались на соответствующую величину 1983 г.

В 1980-е гг. Франция очень пострадала от «кризиса задолженности» развивающихся стран и вынуждена была переориентировать значительную часть экспорта от традиционных партнеров в третьем мире в направлении развитых стран. В начале 1980-х гг. в государственной экономической политике возобладали антирыночные меры. Основным результатом подобных действий явилось резкое сокращение инвестиционной активности во Франции и массовый вывоз капитала за рубеж, что, разумеется, очень неблагоприятно повлияло на динамику основных показателей внутреннего спроса и состояние платежного баланса.

После 1985 г. положение стало постепенно улучшаться: возрос мировой спрос; мировые цены на энергоносители снизились; к власти во Франции вернулись противники активного государственного регулирования. Предприятия начали постепенно ликвидировать задолженность, капиталовложения и экспорт пошли вверх. В экономике наметилось оживление, продолжавшееся до конца 80-х гг. Но в это время Франция столкнулась с новой проблемой – высокой зависимостью от колебаний валютных курсов. Неустойчивость

доллара, усиление валютной нестабильности в Европе после 1990 г. «привязали» французский франк, как и другие европейские валюты, к немецкой марке. Кризисы начала столетия и 2008 г. также нашли свое отражение в расчетах.

На рис. 2 две шкалы на оси ординат: левая ось соответствует изменению показателя стагнации, правая — изменению прироста ВВП. Сплошная линия показывает изменение прироста валового продукта, прерывистая — показатель стагнации. Положение осей и обозначения графиков остаются для трех последующих рисунков.

На экономику Японии в рассматриваемый период вначале повлиял мировой циклический кризис 90-х гг. Об этом свидетельствует поведение кривой показателя стагнации: ее приближение к нулю с 1991 по 1994 гг. совпадало с началом рецессии в экономике Японии. Начался постепенный спад прироста ВВП. Показатель стагнации указывал на временной участок проявления кризиса, который происходил в это время в Японии. Также отчетливо отмечены кризисы начала века и 2008 г. (рис. 3).

После объединения западной и восточной частей страны в 1990 г. Германия стала крупнейшей по экономическому потенциалу страной Европы. На рис. 4 данному периоду соответствует локальный максимум прироста валового продукта. Однако далее из-за возникших в результате объединения трудностей произошло падение объемов.

Начиная с 1990 г. показатель приближался к нулевым значениям, что свидетельствовало о мировом кризисе этого временного промежутка.

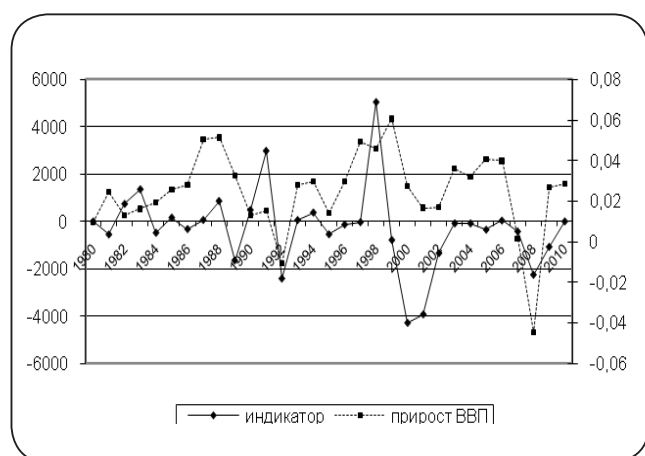


Рис. 2. Поведение показателя стагнации и прироста ВВП для Франции

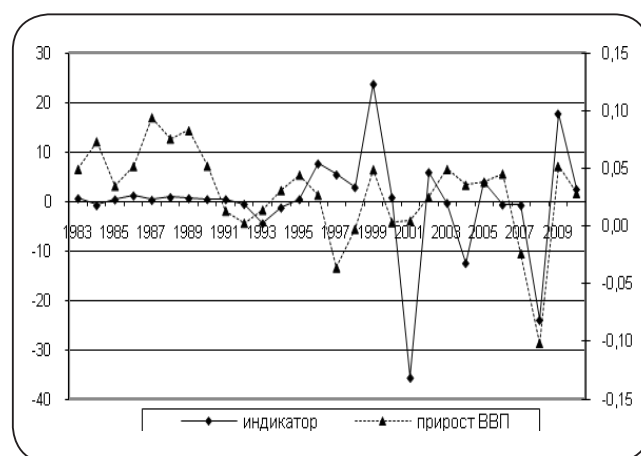
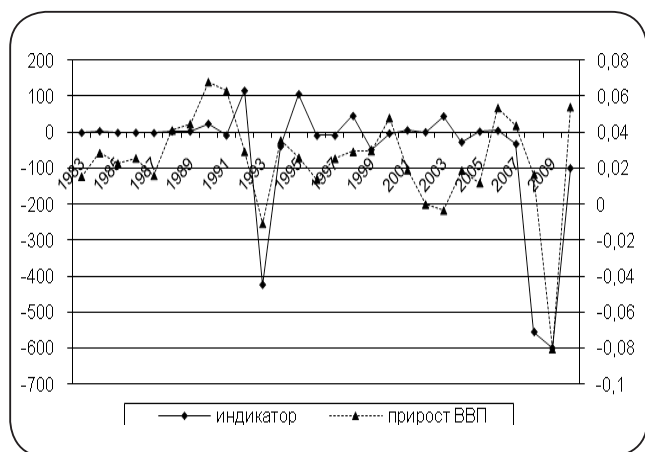


Рис. 3. Изменение показателя стагнации и прироста ВВП для Японии

Кроме того, произошел и спад прироста ВВП. Из-за жесткой налоговой политики государства наблюдались незаинтересованность иностранных инвесторов в создании высокотехнологичных производств на территории Германии, и страна постепенно подходила к технической слабости. Она уже не была мировым технологическим лидером и значительно потеряла позиции в экспорте. Проблема социально-рыночного хозяйства Германии усложнялась из-за консолидации восточных и западных земель.

Следует отметить, что показатель стагнации не улавливает локальное падение валового продукта в течение одного года, а затем его рост, как это было в 1999 г. Падение прироста валового продукта в течение нескольких лет приводит показатель к значениям, близким к нулю, что и отмечалось с 2000 по 2003 гг. Последний кризис показал глубокое падение ВВП и показателя стагнации.



**Рис. 4. Поведение показателя и прироста ВВП для Германии**

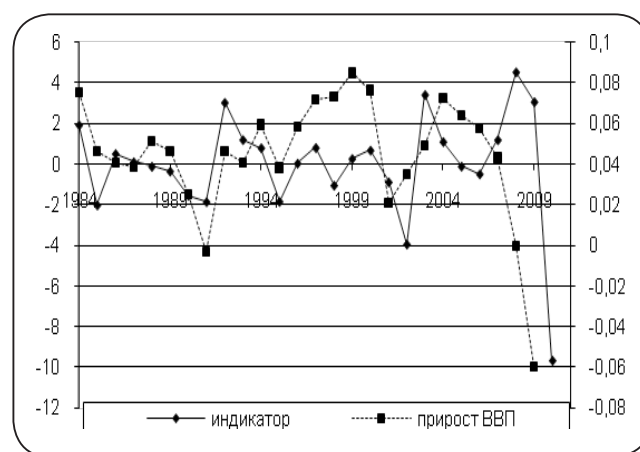
#### Список литературы

1. Кузнецов С.Б. Динамика обновления факторов производства. – Новосибирск: ЦПИ: Изд-во Сибпринт, 2010. – 312 с.
2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления: в 2 т. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 219 с.
3. Кузнецов С.Б. Моделирование инвестиционного управления факторами производства экономики // Финансовое управление развитием экономических систем / под ред. С.С. Чернова. – Новосибирск: ЦРНС, 2009. – 285 с.

Для США рассматривался период с 1983 по 2009 гг. В эти годы было несколько различных кризисов, которые затронули экономическую деятельность государства. Можно выделить участки середины 1980-х и конца 1990-х гг., когда показатель становился отрицательным (рис. 5). Четко выделены участки когда проявились кризисы начала века и 2008 г.

Некоторые несоответствия, возникшие предложенной модели, могут быть объяснены тем, что при анализе не учтен человеческий капитал, играющий все более важную роль в экономиках развитых стран.

Анализ статистических данных позволяет сделать заключение о работоспособности нового показателя, который может быть дополнительным инструментом при изучении циклических явлений экономики.



**Рис. 5. Изменение показателя и прироста ВВП для США**

4. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение / под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: Наука, 2007. – 383 с.
5. Бак П., Чен К. Самоорганизованная критичность // В мире науки. – 1991. – № 3. – С. 16–24.
6. Total Economy Growth Accounting Database, Other Database. – URL: <http://www.eco.rug.nl/ggdc/index-dseries.html>

*В редакцию материал поступил 22.10.10*

*Ключевые слова:* факторы производства, скорость обновления факторов производства, стагнация экономики, показатель стагнации.